ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 3, с. 314–317

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6+517.9:62–50

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГАШЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

© 1997 г. А. Линдквист (Швеция), член-корреспондент РАН В. А. Якубович

Поступило 12.09.96 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Многие важные инженерные проблемы демпфирования колебаний [1–10 и др.] могут быть сформулированы математически как линейно-квадратичная задача оптимизации при наличии полигармонического внешнего возмущения. Если в контуре управления используется компьютер, то математическая модель системы сводится к разностным уравнениям. Мы рассматриваем дискретную линейную систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ew_t, \quad y_t = Cx_t, \tag{1}$$

где $t = 0, 1, 2, \ldots,$ с состоянием $x_t \in \mathbb{R}^n$, выходом $y_t \in \mathbb{R}^m$, управлением $u_t \in \mathbb{R}^k$ и с ненаблюдаемым внешним воздействием $w_t = w^{(1)}e^{i\theta_1 t} + \ldots + w^{(N)}e^{i\theta_N t} \in \mathbb{R}^l$. Точнее, предполагается, что известны частоты $-\pi < \theta_j \le \pi$, но неизвестны комплексные векторные амплитуды $w^{(j)} \in \mathbb{C}^l$. Пусть $\mathfrak{D}$ – множество полигармонических функций w_t указанного вида с фиксированными частотами $\theta_1, \ldots, \theta_N$. В (1) матрицы A, B, C, E постоянны и вещественны, пара (A, B) управляема, (C, A) детектируема и без ограничения общности $\operatorname{rank} C = m$, $\operatorname{rank} E = l$. Управление осуществляется подлежащим определению регулятором

$$u_t = f_t(y_t, y_{t-1}, \ldots, y_0, u_{t-1}, \ldots, u_0), \tag{2}$$

обладающим свойством "слабой устойчивости": для любого решения системы (1), (2) выполнено

$$\frac{1}{\sqrt{t}}|x_t| \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{3}$$

Пусть $\mathfrak{R}$ – класс подобных регуляторов (2). Будем рассматривать также класс $\mathfrak{L}$ линейных реализуемых и стабилизирующих регуляторов

$$D(\sigma)u_t = N(\sigma)y_t, \tag{4}$$

где $D(\lambda)$, $N(\lambda)$ – вещественные матричные полиномы размерностей $k \times k$ и $k \times m$ и σ – оператор сдвига вперед $\sigma y_t = y_{t+1}$. Здесь реализуемость означает, что старший коэффициент у $D(\lambda)$ – неособая матрица и что $\deg N \le \deg D$, стабилизируемость означает, что система (1), (4) асимптотически устойчива, т.е. что матричный полином

$$\Xi(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ -N(\lambda)C & D(\lambda) \end{bmatrix} \tag{5}$$

обладает свойством $\det \Xi(\lambda) \ne 0$ при $|\lambda| \ge 1$. Пусть $\mathfrak{A}$ – класс всех процессов $[x_{(\cdot)}, u_{(\cdot)}]$, для которых выполнено (1) и (3), $\mathfrak{A}(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ – классы процессов, вырабатываемых регуляторами из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ соответственно. Очевидно, $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{A}$.

Цель управления – минимизация (в классе $\mathfrak{R}$) функционала

$$\Phi = \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} \Lambda(x_t, u_t), \tag{6}$$

характеризующего уровень колебаний в системе, где $\Lambda(x, u) = x^*Qx + 2x^*Su + u^*Ru$ – заданная вещественная квадратичная форма, $Q = Q^*$, $R = R^*$. Поскольку функционал Φ зависит от неизвестных $w^{(j)}$ (и, возможно, от начальных условий), то оптимальный регулятор (2), вообще говоря, также должен от них зависеть. Эти величины неизвестны, поэтому мы ставим задачу отыскания оптимального регулятора, не зависящего от этих величин. Такой регулятор, решающий одновременно семейство оптимизационных задач для всевозможных $w_t \in \mathfrak{D}$, будем называть *оптимальным универсальным* (в классе $\mathfrak{D}$), регулятором (ОУР). Естественно ожидать из общих соображений, что ОУР не существует. Будет показано, однако, что при определенных условиях он существует и имеет вид (4) (принадлежит классу $\mathfrak{L}$). Условием существования ОУР кроме естественных

Division of Optimization and System Theory, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden
Санкт-Петербургский государственный университет

технических условий является соотношение размерностей $l := \dim w_t \le m := \dim y_t$. При $l > m$ ОУР существует, лишь если параметры системы и формы Λ удовлетворяют некоторым равенствам, поэтому с точки зрения практики при $l > m$ он не существует. Будет показано также, что построенный ОУР является также оптимальным (в $\mathfrak{L}$) универсальным регулятором в некотором более широком классе стохастических внешних воздействий при естественном видоизменении функционала Φ.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РЕГУЛЯТОРОВ КЛАССА $\mathfrak{L}$

Можно показать, используя предположения о матрицах A, B, C, что рассматриваемую задачу можно свести к аналогичной с устойчивой матрицей A. Поэтому будем предполагать, что (I) A – устойчивая матрица (все $|\lambda_i(A)| < 1$). Будем предполагать также, что (II) выполнено следующее "частотное условие":

$$\Lambda[(e^{i\theta}I_n - A)^{-1}B\tilde{u}, \tilde{u}] > 0 \qquad \forall\tilde{u} \in \mathbb{C}^k, \quad \tilde{u} \ne 0, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]. \tag{7}$$

(Здесь $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{u}) = \tilde{x}^* Q\tilde{x} + 2\mathrm{Re}(\tilde{x}^* S\tilde{u}) + \tilde{u}^* R\tilde{u}$ для $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$, $\tilde{u} \in \mathbb{C}^k$ и $(\ldots)^*$ – эрмитово сопряжение.) Это условие естественно, так как при "сильном" его нарушении ($\exists\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\exists\tilde{u}_0 \in \mathbb{C}^k$: $\Lambda[(e^{i\theta_0}I_n - A)^{-1}B\tilde{u}_0, \tilde{u}_0] < 0$) возможно, что $\inf\Phi = -\infty$.

Введем обозначения:

$$A_\lambda = \lambda I_n - A, \quad \Lambda(A_\lambda^{-1}B\tilde{u}, \tilde{u}) = \tilde{u}^*\Pi(\lambda)\tilde{u}, \quad \chi(\lambda) = \det A_\lambda; \tag{8}$$

$$\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda)^* \text{ при } |\lambda| = 1.$$

Пусть Ψ_x, Ψ_u, Ψ_y – передаточные матрицы-функции в системе (1), (4) от $f_t = Ew_t$ к x_t, u_t, y_t соответственно. Они определяются из соотношений

$$A_\lambda\Psi_x = B\Psi_u + I_n, \quad D(\lambda)\Psi_u = N(\lambda)\Psi_y, \quad \Psi_y = C\Psi_x. \tag{9}$$

Легко показать, что для регулятора из $\mathfrak{L}$ выполнено $\Psi_x(\infty) = 0$, $\Psi_u(\infty) = 0$.

Определение. Два регулятора вида (4) $D_1(\sigma)u_t = N_1(\sigma)y_t$ и $D_2(\sigma)u_t = N_2(\sigma)y_t$ называются *эквивалентными*, если существуют матричные полиномы D_0 и N_0 размерностей $k \times k$ и $k \times m$ соответственно, такие, что $D_1 = M_1D_0$, $D_2 = M_2D_0$, $N_1 = M_1N_0$, $N_2 = M_2N_0$, где M_1 и M_2 – некоторые устойчивые ($\det M_j(\lambda) \ne 0$ для $|\lambda| \ge 1$) матричные полиномы.

Ясно, что Ψ_x, Ψ_u, Ψ_y – инварианты относительно этой эквивалентности.

Лемма. (i) *Пусть A – устойчивая матрица и $V(\lambda) = \chi(\lambda)CA_\lambda^{-1}$ – матричный полином. Пусть $\rho(\lambda)$ – произвольный скалярный устойчивый полином и $R(\lambda)$ – произвольный $(k \times m)$-полином такой, что $\deg(RV) < \deg\rho$. Тогда регулятор $D(\sigma)u_t = N(\sigma)y_t$ с*

$$D(\lambda) = \rho(\lambda)I_k + R(\lambda)V(\lambda)B, \quad N(\lambda) = \chi(\lambda)R(\lambda) \tag{10}$$

реализуемый и стабилизирующий и для этого регулятора $\Psi_u(\lambda) = \rho(\lambda)^{-1}R(\lambda)V(\lambda)$, $\det\Xi(\lambda) = \chi(\lambda)[\rho(\lambda)]^k$ где $\Xi(\lambda)$ – характеристический полином (5).

(ii) *Любой регулятор класса $\mathfrak{L}$ эквивалентен одному из регуляторов указанного вида.*

Докажем пункт (i). Пусть D и N определены формулами (10). Условие реализуемости, очевидно, выполнено. Мы имеем из (5) $\det\Xi = \det A_\lambda \det(D - NCA_\lambda^{-1}B)$. Но $D - NCA_\lambda^{-1}B = \rho I_k$, поэтому $\det\Xi = \chi\rho^k$ – устойчивый полином. Из (1), (10) следует что $\Psi_u = \rho^{-1}RV$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА. МИНИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ $\mathfrak{L}$

Пусть D и N имеют указанный в лемме вид. Система (1), (4) имеет решение

$$\begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ y_t \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N} \begin{bmatrix} x^{(j)} \\ u^{(j)} \\ y^{(j)} \end{bmatrix} e^{i\theta_j t}, \quad \begin{bmatrix} x^{(j)} \\ u^{(j)} \\ y^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_x(\lambda_j) \\ \Psi_u(\lambda_j) \\ \Psi_y(\lambda_j) \end{bmatrix} Ew^{(j)}, \tag{11}$$

где $\lambda_j = e^{i\theta_j}$. В силу ее устойчивости для любого решения системы (1), (4)

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N} \Lambda(x^{(j)}, u^{(j)}). \tag{12}$$

Здесь $x^{(j)} = A_{\lambda_j}^{-1}(Bu^{(j)} + Ew^{(j)})$. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации Φ по $u^{(1)}, \ldots, u^{(N)}$. После простых преобразований получим

$$\Lambda(x^{(j)}, u^{(j)}) = (u^{(j)} - \hat{u}^{(j)})^*\Pi(\lambda_j)(u^{(j)} - \hat{u}^{(j)}) + \Phi_{\min}^{(j)}, \tag{13}$$

где

$$\hat{u}^{(j)} = U(\lambda_j)w^{(j)},$$
$$U(\lambda) = -\Pi(\lambda)^{-1}(QA_\lambda^{-1}B + S)^*A_\lambda^{-1}E, \tag{14}$$
$$\Phi_{\min}^{(j)} = q_j - (\hat{u}^{(j)})^*\Pi(\lambda_j)\hat{u}^{(j)},$$
$$q_j = (w^{(j)})^*E^*A_{\lambda_j}^{*-1}QA_{\lambda_j}^{-1}Ew^{(j)}.$$

По условию $\Pi(\lambda_j) > 0$, поэтому Φ достигает минимума по $u^{(j)}$ при $u^{(j)} = \hat{u}^{(j)}$ и этот минимум равен $\Phi_{\min}^{(1)} + \ldots + \Phi_{\min}^{(N)}$.

Минимизация в классе $\mathfrak{L}$ будет обеспечена, если найдется регулятор из $\mathfrak{L}$, для которого $u^{(j)} = \hat{u}^{(j)}$ или, согласно (11), $\Psi_u(\lambda_j)Ew^{(j)} = \hat{u}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, N$. По лемме достаточно найти ρ, R, $\deg\rho > \deg(RV)$, такие, что $R(\lambda_j)F_jw^{(j)} = \rho(\lambda_j)U(\lambda_j)w^{(j)}$, где $F_j = V(\lambda_j)E_j$ – матрицы порядка $m \times l$. Если $f_j = F_jw^{(j)} \neq 0$, $j = 1, \ldots, N$, то такие ρ, R существуют: по устойчивому ρ достаточно высокой степени следует определить R из условий $R(\lambda_j) = (f_j^* f_j)^{-1}\rho(\lambda_j)U(\lambda_j)w^{(j)}f_j^*$, $j = 1, \ldots, N$. Полученный регулятор вообще зависит от $w^{(j)}$. Он не будет зависеть от $w^{(j)}$, если $R(\lambda_j)F_j = \rho(\lambda_j)U(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, N$. При $m \geq 1$ и $\det F_j^* F_j \neq 0$ эти уравнения имеют решение

$$R(\lambda_j) = \rho(\lambda_j)U(\lambda_j)(F_j^*F_j)^{-1}F_j^* + \Delta R_j, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{15}$$

где ΔR_j – любые матрицы такие, что $\Delta R_jF_j = 0$, $j = 1, \ldots, N$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены сформулированные выше условия* (I), (II), *а также что* (III) $m := \dim y_t \geq l := \dim w_t$, (IV) $\det F_j^* F_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, N$, *где* $F_j = V(\lambda_j)E$, $\lambda_j = e^{i\theta_j}$. *Тогда*:

(i) *Существует оптимальный (в классе* $\mathfrak{L}$*) универсальный (в классе* $\mathfrak{D}$*) регулятор; он определяется формулами* (10), *где* ρ *– произвольный скалярный устойчивый полином,* R *– матричный полином размерности* $k \times m$ *такой, что* $\deg(RV) < \deg\rho$ *и выполнены интерполяционные соотношения* (15).

(ii) *Любой оптимальный (в классе* $\mathfrak{L}$*) универсальный (в классе* $\mathfrak{D}$*) регулятор эквивалентен одному из регуляторов, указанных в пункте* (i).

(iii) *Минимальное значение функционала* Φ *в классе* $\mathfrak{L}$ *есть* $\Phi_{\min} = \Phi_{\min}^{(1)} + \ldots + \Phi_{\min}^{(N)}$, *где* $\Phi_{\min}^{(j)}$ *определены формулами* (14).

Доказательство. Утверждения (i), (iii) доказаны выше. Докажем (ii). Пусть $\hat{D}(\sigma)u_t = \hat{N}(\sigma)y_t$ – ОУР. Тогда этот регулятор оптимален, в частности, если все амплитуды, кроме $w^{(j)}$, равны нулю: $w_t = w^{(j)}e^{i\theta_j t}$. Для него $\Phi = \Phi_{\min} = \Phi_{\min}^{(j)}$ и из (12), (13) $u^{(j)} = \hat{u}^{(j)}$. Из (11), (14) $\Psi_u(\lambda_j)Ew^{(j)} = U(\lambda_j)w^{(j)}$. В силу произвольности $w^{(j)}$ и j имеем $\Psi_u(\lambda_j)E = U(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, N$. По лемме этот регулятор эквивалентен некоторому регулятору с коэффициентами (10) и с той же матрицей-функцией $\Psi_u(\lambda)$. По лемме $\Psi_u = \rho^{-1}RV$, поэтому $R(\lambda_j)F_j = \rho(\lambda_j)U(\lambda_j)$, т.е. справедливо (15).

Замечания. (I) Из доказательства следует, что теорема остается справедливой, если вместо (II) выполнено "ослабленное частотное условие" $\Pi(\lambda_j) > 0$, $j = 1, \ldots, N$.

(II) Если $m < l$, то, повторяя доказательство, получаем, что ОУР существует, лишь если имеют решение $X_j = \rho(\lambda_j)^{-1}R(\lambda_j)$ уравнения $X_jF_j = U(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, N$. Это lkN скалярных уравнений с mkN неизвестными, они имеют решение лишь в исключительных случаях. Именно, если $\det F_jF_j^* \neq 0$, $j = 1, \ldots, N$, то они имеют решение, лишь если $U(\lambda_j)[F_j^*(F_jF_j^*)^{-1}F_j - I_m] = 0$, $j = 1, \ldots, N$. Таким образом, с точки зрения практики ОУР не существует при $m < l$. Из доказательства следует, что при $m < l$ оптимальный неуниверсальный регулятор, как правило, существует.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ. МИНИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ $\mathfrak{N}$

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (I)–(IV). *Оптимальный в классе* $\mathfrak{L}$ *универсальный регулятор, определенный в пункте* (i) *теоремы* 1, *вырабатывает процесс* (x_t, u_t), *оптимальный в классе регуляторов* $\mathfrak{N}$ *и, более того, оптимальный в классе* $\mathfrak{A}$ *всех процессов, удовлетворяющих первому уравнению* (1) *и условию* (3).

Доказательство. Обозначим: $\mathfrak{L}_C$, $\mathfrak{L}_I$ – классы $\mathfrak{L}$ регуляторов (4) с выходами $y_t = Cx_t$ и $y_t = x_t$ соответственно. Пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_C)$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_I)$ – классы вырабатываемых ими процессов (x_t, u_t) при всевозможных начальных условиях. Из формул (8), (14) следует, что $\Pi(\lambda)$, $\Phi_{\min}^{(j)}$, а значит, и $\Phi_{\min} = \Phi_{\min}^{(1)} + \ldots + \Phi_{\min}^{(N)}$ не зависят от C. Поэтому в классах $\mathfrak{L}_C$ и $\mathfrak{L}_I$ или, эквивалентно, в классах $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_C)$ и $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_I)$ минимум функционала Φ один и тот же, равный $\Phi_{\min}$. Но в работе [11] (см. теорему 5.1 и замечание 5.2) доказано, что минимумы Φ в классах $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_I)$ и $\mathfrak{A}$ совпадают. Так как $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_C) \subset \mathfrak{A}$, то регулятор, оптимальный в классе $\mathfrak{L}_C$, вырабатывает процесс, оптимальный в классе $\mathfrak{A}$. Поскольку $\mathfrak{A}(\mathfrak{L}_C) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{A}$, то этот регулятор оптимален и в классе $\mathfrak{N}$.

5. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В этом случае рассматривается класс $\mathfrak{L}$ регуляторов и функционал (6) заменяется на

$$\Phi = \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}\Lambda(x_t, u_t)\right\}, \tag{16}$$

где $\mathbf{E}\{\cdot\}$ означает математическое ожидание. Просто показать, что в случае, когда внешнее воздействие w_t имеет прежний вид $w_t = w^{(1)}e^{i\theta_1 t} + \ldots + w^{(N)}e^{i\theta_N t}$, но $w^{(j)}$ – случайные векторы ($\mathbf{E}|w^{(j)}|^2 < +\infty$), оптимальный в $\mathfrak{U}$ универсальный (в $\mathfrak{T}$) регулятор минимизирует также и функционал (16). Более сложная модель стохастических воздействий w_t описывается уравнениями

$$z_{t+1} = Fz_t + Gv_t, \quad w_t = Hz_t + Kv_t,$$

где $F = \mathrm{diag}\{e^{i\theta_j}I_l\}$, $H = [I_l, I_l, \ldots, I_l]$, K, G – постоянные матрицы, v_t – белый шум, не зависящий от случайного z_0, $\mathbf{E}|z_0|^2 < +\infty$ и $\mathbf{E}\{v_t v_s^*\} = V_t\delta_{st}$, $\mathbf{E}\{v_t\} = 0$. Поскольку нас интересует случай ограниченного внешнего воздействия, будем предполагать, что $|V_0| + |V_1| + \ldots < \infty$. Пусть $\mathfrak{S}$ – класс всевозможных полученных таким образом случайных процессов с разными K, G, V_t и с разными случайными $z_0 = \mathrm{col}(w^{(1)}, \ldots, w^{(N)})$, $\mathbf{E}|w^{(j)}|^2 < \infty$. В случае $v_t \equiv 0$ и детерминированного $z_0 = \mathrm{col}(w^{(1)}, \ldots, w^{(N)})$ мы получаем детерминированную задачу, рассмотренную ранее.

Регулятор (4) класса $\mathfrak{U}$ будем называть оптимальным (в $\mathfrak{U}$) и универсальным (в $\mathfrak{S}$), если он один и тот же для всех $w_t \in \mathfrak{S}$ и оптимален в $\mathfrak{U}$ при всех $w_t \in \mathfrak{S}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (I)–(IV). *Оптимальный (в* $\mathfrak{U}$*), универсальный (в* $\mathfrak{S}$*) регулятор существует; им является линейный регулятор, определенный в пункте* (i) *теоремы* 1.

Наметим лишь идею доказательства этой теоремы, взятую из работы [12]. Нормализуем белошумный процесс v_t, полагая $v_t = L_t\eta_t$, где $\mathbf{E}\{\eta_t\} = 0$, $\mathbf{E}\{\eta_s\eta_t^*\} = I_p\delta_{st}$ и $L_tL_t^* = V_t$. Можно провести декомпозицию рассматриваемой оптимизационной задачи в счетное число детерминированных задач, соответствующих "ортам" $(\eta_t)_k$, $k = 1, \ldots, p$, и одной задачи с $w_t = w^{(1)}e^{i\theta_1 t} + \ldots + w^{(N)}e^{i\theta_N t}$ со случайными $w^{(j)}$. Все эти задачи имеют ранее рассмотренный вид, они различаются лишь амплитудами $w^{(j)}$. Поскольку ОУР теоремы 1 (i) решает одновременно все такие задачи, он доставляет оптимальное значение и функционалу (16) в рассматриваемой стохастической задаче.

Исследование поддержано грантом INT AS–94–2889.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985.
2. *Фролов К.В., Фурман Ф.А.* Прикладная теория виброзащитных систем. М.: Машиностроение, 1980.
3. Вибрации в технике. Справочник / Под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение, 1981. Т. 6.
4. *Генкин М.Д., Елезов В.Г., Яблонский В.П.* Методы управляемой виброзащиты машин. М.: Наука, 1985.
5. *Красовский А.А.* Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
6. *Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е.* Динамика управляемых машинных агрегатов. М.: Наука, 1984.
7. *Guiching D.* Active Noise and Vibration Control. Reference Bibliography. Goettingen: Drittes Phys. Inst. Univ. of Goettingen, 1990.
8. *Bittanti S., Lorito F., Strada S.* // Trans. ASME. J. Dynamical Systems, Measurement and Control. 1996. V. 118. № 3. P. 482–488.
9. *Miele A.* // Proc. XXIX Conf. Decision and Control. Honlulu, 1990. P. 737–746.
10. *Zhao Y., Bryson A.E.* // Ibid. P. 753–757.
11. *Lindquist A., Yakubovich V.A.* // IEEE Trans. Automat. Contr. (submit. publ.).
12. *Lindquist A.* // SIAM J. Contr. 1973. V. 11. P. 323–343.