ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 361, № 2, с. 177–180

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6+517.9:62–50

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОТСЛЕЖИВАНИЯ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

© 1998 г. А. Линдквист (Швеция), член-корреспондент РАН В. А. Якубович

Поступило 28.01.98 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачи отслеживания сигналов, составляющие одну из важнейших тем теории управления, имеют различные математические постановки (см. [1–6] и др.). Ниже рассматривается некоторый новый вариант этой задачи.

Дана дискретная система управления

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ew_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

с двумя выходами

$$y_t = Cx_t, \quad z_t = Hx_t + Ju_t \tag{2}$$

и с ненаблюдаемой гармонической помехой

$$w_t = w^{(1)}e^{i\theta'_1 t} + \ldots + w^{(N')}e^{i\theta'_{N'} t};$$

частоты $\theta'_1, \ldots, \theta'_{N'}$ известны. В (1), (2) все величины вещественны, размерности векторов x_t, u_t, w_t, y_t, z_t равны соответственно d_x, d_u, d_w, d_y, d_z, постоянные матрицы A, B, E, C, H, J имеют соответствующие размерности. Пара $\{A, B\}$ стабилизируема и без ограничения общности $d_y \le d_x$, $\det CC^* \ne 0$. Требуется построить регулятор со входами y_t и r_t и с выходом u_t так, чтобы выход объекта z_t оптимальным образом отслеживал любой вещественный гармонический сигнал $r_t = r^{(1)}e^{i\theta''_1 t} + \ldots + r^{(N'')}e^{i\theta''_{N''} t}$. (Частоты θ''_j известны, комплексные векторные амплитуды $r^{(j)}$ заранее неизвестны, размерности r_t и z_t равны: $d_r = d_z$.) Спектры $\{\theta'_j\}$ и $\{\theta''_j\}$ возмущения w_t и сигнала r_t могут быть как различны, так и иметь непустое пересечение. Для упрощения дальнейших формул введем множества индексов $\mathfrak{S}_w$ и $\mathfrak{S}_r$, $\mathfrak{S}_w \cup \mathfrak{S}_r = \{1, 2, \ldots, N\}$, считая, что $w^{(j)} = 0$ при $j \notin \mathfrak{S}_w$, $w^{(j)}$ произвольны при $j \in \mathfrak{S}_w$ и $r^{(j)} = 0$ при $j \notin \mathfrak{S}_r$, $r^{(j)}$ произвольны при $j \in \mathfrak{S}_r$. Тем самым определены классы возмущений и сигналов, которые будем обозначать $\hat{\mathfrak{S}}_w$, $\hat{\mathfrak{S}}_r$. Возмущения и сигналы записываются теперь единообразно в виде

$$w_t = w^{(1)}e^{i\theta_1 t} + \ldots + w^{(N)}e^{i\theta_N t},$$

$$r_t = r^{(1)}e^{i\theta_1 t} + \ldots + r^{(N)}e^{i\theta_N t},$$

$$-\pi < \theta_j \le +\pi, \quad \theta_j \ne \theta_h \text{ при } j \ne h.$$

Оптимальность отслеживания понимается в смысле минимизации функционала

$$\Phi = \varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}\{|z_t - r_t|^2 + \Lambda_0(x_t, u_t)\}, \tag{3}$$

где $\Lambda_0(x, u) = x^*Q_0x + 2x^*S_0u + u^*R_0u$ – заданная вещественная квадратичная форма (часто $\Lambda_0 \equiv 0$). Более точно: требуется построить регулятор вида

$$u_t = \varphi_t(y_t, \ldots, y_{t-q_1}, r_t, \ldots, r_{t-q_2}) \tag{4}$$

такой, что: 1) функции $\varphi_t(\ldots)$ не зависят от неизвестных $w^{(j)}$ и $r^{(j)}$, 2) замкнутая система (1), (2), (4) устойчива в том смысле, что для любого ее решения $t^{-1}|x_t|^2 \to 0$ при $t \to \infty$, 3) для искомого регулятора (4) функционал Φ достигает наименьшего значения на множестве всевозможных процессов (x_t, u_t, y_t, z_t), удовлетворяющих уравнениям (1), (2) и условию $t^{-1}|x_t|^2 \to 0$ при $t \to \infty$. Такой регулятор будем называть о п т и м а л ь н ы м у н и в е р с а л ь н ы м р е г у л я т о р о м (ОУР). Итак, ОУР должен решать одновременно семейство оптимизационных задач, различающихся наборами $\{w^{(j)}\}$, $j \in \mathfrak{S}_w$ и $\{r^{(h)}\}$, $h \in \mathfrak{S}_r$. Будет показано, что при ряде естественных предположений ОУР существует и что в качестве ОУР может быть взят линейный регулятор

$$M(\sigma)u_t = N(\sigma)y_t + L(\sigma)r_t, \tag{5}$$

где $M(\lambda)$, $N(\lambda)$, $L(\lambda)$ – матричные полиномы, σ – оператор сдвига вперед, $\sigma u_t = u_{t+1}$. При этом регулятор (5) реализуем в том смысле, что формула (5) может быть представлена в виде (4). Будет описан классс всех ОУР вида (5). Будет также рассмотрен случай, когда в (3) $\Lambda_0 \equiv 0$ и $\inf \Phi = 0$ (при

Санкт-Петербургский государственный университет

этом $|z_t - r_t| \to 0$ при $t \to \infty$), и случай негармонических сигналов r_t.

2. ЛИНЕЙНЫЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ РЕАЛИЗУЕМЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Введем обозначения: $n = d_x$, $A_\lambda = \lambda I_n - A$, I_n – единичная матрица, $\chi(\lambda) = \det A_\lambda$, $G(\lambda) = \chi A_\lambda^{-1}$. Пусть Ψ_x, Ψ_u, Ψ_y – передаточные функции от Ew_t к x_t, u_t, y_t соответственно и $\hat{\Psi}_x$, $\hat{\Psi}_u$ – передаточные функции от r_t к x_t, u_t соответственно. Они определяются соотношениями $A_\lambda \Psi_x = B\Psi_u + I_n$, $M\Psi_u = N\Psi_y$, $\Psi_y = C\Psi_x$, $A_\lambda \hat{\Psi}_x = B\hat{\Psi}_u$, $-NC\hat{\Psi}_x + M\hat{\Psi}_u = L$. Пусть $W_y = CA_\lambda^{-1}B$, $W_z = J + HA_\lambda^{-1}B$ – передаточные функции от u_t к y_t, z_t и $V_y = \chi W_y$, $V_z = \chi W_z$ – матричные полиномы. Регулятор (5) называется с т а б и л и з и р у ю щ и м, если $\det\Xi(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| \geq 1$, где

$$\Xi(\lambda) = \begin{bmatrix} A_\lambda & -B \\ -NC & M \end{bmatrix},$$

и р е а л и з у е м ы м, если $\det M \neq 0$ и $M^{-1}N$, $M^{-1}L$ – правильные рациональные функции.

Будем называть эквивалентными два регулятора вида (5) $M_1u_t = N_1y_t + L_1r_t$ и $M_{2ut} = N_2y_t + L_2r_t$, если существуют $d_u \times d_u$ устойчивые матричные полиномы Θ_1 и Θ_2 такие, что $\Theta_1^{-1}[M_1, N_1, L_1] = \Theta_2^{-1}[M_2, N_2, L_2]$. (Устойчивым, как обычно, называется полином Θ такой , что $\det\Theta(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| \geq 1$.) Ясно, что Ψ_x, Ψ_y, Ψ_u, $\hat{\Psi}_x$, $\hat{\Psi}_u$ инвариантны относительно этой эквивалентности. Будем считать не ограничивая общности (см. [7]), что в (1) A – устойчивая матрица ($\det A_\lambda \neq 0$ при $|\lambda| \geq 1$). Дополняя доказательство леммы 4.3 из [7] на случай $L \neq 0$, получим следующий результат.

Л е м м а 1. *Пусть $\rho(\lambda)$ – произвольный устойчивый полином, $R(\lambda)$ и $L(\lambda)$ – произвольные матричные полиномы размерностей $d_u \times d_y$ и $d_u \times d_z$ такие, что* $\deg(RCG) < \deg\rho$, $\deg L \leq \deg\rho$. *Тогда регулятор* (5) *с* $M(\lambda) = \rho(\lambda)I_{d_u} + R(\lambda)V_y(\lambda)$, $N(\lambda) = \chi(\lambda)R(\lambda)$ *стабилизирующий и реализуемый и для него* $\Psi_u(\lambda) = \rho(\lambda)^{-1}R(\lambda)CG(\lambda)$, $\hat{\Psi}_u(\lambda) = \rho(\lambda)^{-1}L(\lambda)$, $\det\Xi(\lambda) = \chi(\lambda)[\rho(\lambda)]^{d_u}$. *Обратно, любой стабилизирующий и реализуемый регулятор эквивалентен одному из регуляторов указанного вида.*

3. ОПТИМАЛЬНЫЙ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Введем частотную матрицу для рассматриваемой оптимизационной задачи. Представим выражение (3) в виде $|z_t - r_t|^2 + \Lambda_0(x_t, u_t) = \Lambda(x_t, u_t) + \ldots$, где $\Lambda(x_t, u_t) = x_t^* Qx_t + 2x_t^* Su_t + u_t^* Ru_t$, $Q = Q^*$, $R = R^*$, а точки означают линейные члены относительно x_t, u_t. Для $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{d_x}$, $\tilde{u} \in \mathbb{C}^{d_u}$ положим $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{u}) = \tilde{x}^* Q\tilde{x} + 2\mathrm{Re}(\tilde{x}^* S\tilde{u}) + \tilde{u}^* R\tilde{u}$. Заменим (формально) (1) на $\lambda\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ и представим $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{u})$ в виде $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{u}) = \Lambda(A_\lambda^{-1}B\tilde{u}, \tilde{u}) = \tilde{u}^*\Pi(\lambda)\tilde{u}$, где $\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda)^*$. Будем называть $\Pi(\lambda)$ частотной матрицей, неравенство $\Pi(\lambda) > 0$ ($\forall\lambda$: $|\lambda| = 1$) – частотным условием (ЧУ), неравенства $\Pi_j = \Pi(e^{i\theta_j}) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, – слабым частотным условием (СЧУ). Обозначим $\lambda_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что в* (1) *A – устойчивая матрица и что выполнено ЧУ. Пусть $G(\lambda)$ и $V_y(\lambda)$ – определенные в начале раздела* 2 *матричные полиномы и пусть*

$$F_j := CG(\lambda_j)E = \chi(\lambda_j)CA_{\lambda_j}^{-1}E,$$

где E – матрица в (1). *Тогда если $d_y \geq d_w$ и* $\mathrm{rank}F_j = d_w$ *для $j \in \mathfrak{S}_w$, то существует оптимальный универсальный регулятор и он имеет вид* (5). *Его коэффициенты M, N, L определяются так, как указано в лемме* 1 *с дополнительными условими*

$$R(\lambda_j)F_j = \rho(\lambda_j)U_1(\lambda_j) \quad \text{для } j \in \mathfrak{S}_w,$$

$$L(\lambda_j) = \rho(\lambda_j)U_2(\lambda_j) \quad \text{для } j \in \mathfrak{S}_r,$$

где $U_1(\lambda)$, $U_2(\lambda)$ определены формулами

$$U_1(\lambda) = -\Pi(\lambda)^{-1}[QA_\lambda^{-1}B + S]^* A_\lambda^{-1}E,$$

$$U_2(\lambda) = \Pi(\lambda)^{-1}[HA_\lambda^{-1}B + J]^*.$$

(Уравнения для $R(\lambda_j)$ имеют решения.) Любой другой ОУР вида (5) *эквивалентен одному из регуляторов, полученному указанным образом. Если вместо ЧУ выполнено СЧУ, то построенный ОУР остается оптимальным в классе всевозможных реализуемых стабилизирующих регуляторов* (5) *и универсальным в классах $\hat{\mathfrak{S}}_w$, $\hat{\mathfrak{S}}_r$.*

Если $d_y < d_w$ или $d_y \geq d_w$, но $\det F_j^* F_j = 0$ для некоторого $j \in \mathfrak{S}_w$, то оптимальный регулятор существует, но ОУР, как правило, не существует, он существует, лишь если параметры системы (1), (2) и формы Λ_0 принадлежат некоторому множеству нулевой меры.

С л е д с т в и е. При выполнении **ЧУ** нельзя уменьшить значение функционала Φ, применяя какой-либо нелинейный регулятор (3) вместо описанного в теореме 1 линейного регулятора (5).

Доказательство теоремы 1 проводится по той же схеме, что и теоремы 5.1 в [7] или теорем 1, 2 в [8].

4. СЛУЧАЙ $\Lambda_0(x, u) \equiv 0$

Рассмотрим более подробно случай, когда в функционале (3) $\Lambda_0(x, u) \equiv 0$. Обозначим $W_z(\lambda) = J + H(\lambda I_n - A)^{-1}B$, $\lambda_j = e^{i\theta_j}$, $W_j = W_z(\lambda_j)$, $U_j = H(\lambda_j I_n - A)^{-1}E$, $\rho_j = \rho(\lambda_j)$, $\chi_j = \chi(\lambda_j)$.

Теорема 2. *Предположим, что в* (1) A – *устойчивая матрица*, $d_y \geq d_w$ и $F_j^* F_j > 0$ *для* $j \in \mathfrak{S}_w$.

1^0) *Пусть* $d_u \geq d_r$ *и* $W_j W_j^* > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$. *Существует оптимальный универсальный регулятор, он имеет вид* (5) *и* $\min\Phi = 0$. (*Следовательно,* $|z_t - r_t| \to 0$ *при* $t \to \infty$ *для любых* $w_t \in \hat{\mathfrak{S}}_w$, $r_t \in \hat{\mathfrak{S}}_r$ *и для любого решения* z_t *системы* (1), (2), (5).) *Коэффициенты* M, N, L *этого регулятора определяются так, как указано в лемме* 1, *со следующими дополнительными условиями*:

$$R(\lambda_j) = -\rho_i W_j^*(W_j W_j^*)^{-1} U_j (F_j^* F_j)^{-1} F_j^* + \Delta R_j \quad \text{для } j \in \mathfrak{S}_w, \tag{6}$$

$$L(\lambda_j) = \rho_j W_j^*(W_j W_j^*)^{-1} + \Delta L_j \quad \text{для } j \in \mathfrak{S}_r. \tag{7}$$

Здесь ΔR_j, ΔL_j – *любые* $(d_u \times d_y)$- *и* $(d_u \times d_z)$-*матрицы, такие, что* $W_j \Delta R_j F_j = 0$, $W_j \Delta L_j = 0$. *Любой ОУР вида* (5) *эквивалентен одному из ОУР, построенному указанным образом.*

2^0) *Пусть* $d_u < d_r$ *и* $\Pi(\lambda) = W(\lambda)^* W(\lambda) > 0$ *при* $|\lambda| = 1$. *Существует оптимальный универсальный регулятор, он имеет вид* (5) *и*

$$\min\Phi = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j^0, \tag{8}$$

$$\text{где } \Phi_j^0 = g_j^*(I_{d_z} - W_j \Pi_j^{-1} W_j^*) g_j,$$

$g_j = H(\lambda_j I_n - A)^{-1} E w^{(j)} - r^{(j)}$, $\Pi_j = \Pi(\lambda_j)$. *Коэффициенты* M, N, L *этого регулятора определяются так, как указано в лемме* 1, *со следующими дополнительными условиями*:

$$R(\lambda_j) = -\rho_j \Pi_j^{-1} W_j^* U_j (F_j^* F_j)^{-1} F_j^* + \Delta R_j \quad \text{для } j \in \mathfrak{S}_w, \tag{9}$$

где $\Delta R_j F_j = 0$,

$$L(\lambda_j) = \rho(\lambda_j) \Pi_j^{-1} W_j^* \quad \text{для } j \in \mathfrak{S}_r. \tag{10}$$

Любой ОУР вида (5) *эквивалентен одному из ОУР указанного вида. Если допустимыми являются лишь линейные реализуемые и стабилизирующие регуляторы* (5), *то условие* $\Pi(\lambda) > 0$ *при* $|\lambda| = 1$ *можно заменить условием* $\Pi(\lambda_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство использует результаты [7].

Теорема 2 показывает, что если размерность вектора управления u_t больше либо равна размерности отслеживаемого сигнала r_t, то, как правило, при любой внешней помехе w_t возможно асимптотическое отслеживание ($|z_t - r_t| \to 0$ при $t \to \infty$). В противном же случае асимптотическое отслеживание, как провило, невозможно: ошибка оценивается снизу величиной $\min\Phi > 0$ (см. (8)).

5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОТСЛЕЖИВАНИЕ

Рассмотрим систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Er_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

считая вначале в отличие от раздела 3, что r_t – произвольная функция. Реализуемый стабилизирующий регулятор (5) называется T-универсальным, если он обеспечивает асимптотическое отслеживание любого сигнала r_t выходом z_t системы, т.е. если для любого решения системы (2), (5), (11) при любом сигнале r_t выполнено $|z_t - r_t| \to 0$ при $t \to \infty$. Задача о построении T-универсального регулятора достаточно проста, однако авторы не нашли в литературе ее решения. Ниже мы приводим полное ее решение для случая $d_u = d_z$. (Случай $d_u \neq d_z$ рассматривается аналогично[1].)

Как и выше, не ограничивая общности, будем считать, что в (11) $HA_\lambda^{-1}E$ от r_t к z_t в (11), (2).

Теорема 3. *Для существования T-универсального регулятора необходимо и достаточно, чтобы все полюсы матрицы-функции* $W_z(\lambda)^{-1}[I_{d_z} - U(\lambda)]$ *лежали в круге* $|\lambda| < 1$. *Пусть это условие выполнено. Пусть* $\rho(\lambda)$ – *произвольный скалярный вещественный устойчивый полином,* $R(\lambda)$ – *произвольный* $(d_z \times d_y)$-*матричный вещественный полином, такие, что* $Q(\lambda) = \rho(\lambda) W_z(\lambda)^{-1}[I_{d_z} - U(\lambda)]$ – *матричный полином и* $\deg\rho(\lambda) > \deg[R(\lambda)CG(\lambda)]$, $\deg\rho(\lambda) \geq \deg Q(\lambda)$. *Регулятор* (5) *с коэффициентами*

$$M(\lambda) = \rho(\lambda) I_{d_u} + R(\lambda) V_y(\lambda), \quad N(\lambda) = \chi(\lambda) R(\lambda),$$

[1] В специальных случаях *какой-либо* T-универсальный регулятор строится тривиально. Пусть, например, $a(\sigma)y_t = b(\sigma)u_t + c(\sigma)r_t$ – скалярное уравнение объекта управления и $z_t = y_t$. Регулятор берем в виде $b(\sigma)u_t + c(\sigma)r_t = d(\sigma)y_t + [a(\sigma) - d(\sigma)]r_t$. Если этот регулятор реализуемый (т.е. $\deg d \leq \deg b$, $\deg(c - a + d) \leq \deg b$), $b(\lambda)$ и $a(\lambda) - d(\lambda)$ – устойчивые полиномы, то указанный регулятор T-универсален.

$$L(\lambda) = Q(\lambda) - R(\lambda)CG(\lambda)E$$

T-универсальный. Любой другой T-универсальный регулятор эквивалентен какому-либо регулятору, построенному указанным образом.

Заметим, что, как показывает теорема 3, условия, гарантирующие существование T-универсального регулятора, весьма ограничительны. (Основное ограничение: требование $\deg\rho \geq \deg Q$.)

В связи с этим рассмотрим аналогичную задачу для более узкого класса $\mathcal{H}$ вещественных гармонических сигналов $r_t = r^{(1)}e^{i\theta_1 t} + \ldots + r^{(N)}e^{i\theta_N t}$ с фиксированными (известными) частотами θ_j и с произвольными (заранее неизвестными) комплексными векторными амплитудами $r^{(j)}$. Будем называть регулятор (5) TH-универсальным, если он реализуемый, стабилизирующий, его коэффициенты не зависят от неизвестных $r^{(j)}$, а также для любого $r_t \in \mathcal{H}$ и для любого решения системы (2), (4), (11) выполнено $|z_t - r_t| \to 0$ при $t \to \infty$. Пусть попрежнему для простоты формулировок $d_u = d_z$.

Т е о р е м а 4. *Предположим, что A – устойчивая матрица и* $\det W_z(\lambda_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *где* $\lambda_j = e^{i\theta_j}$. *Пусть* $\rho(\lambda)$ *– произвольный скалярный вещественный устойчивый полином,* $R(\lambda)$ *и* $L(\lambda)$ *– произвольные* $(d_z \times d_y)$*- и* $(d_z \times d_z)$*-матричные вещественные полиномы, такие, что* $\deg\rho(\lambda) > \deg(R(\lambda)CG(\lambda))$, $\deg\rho(\lambda) > \deg L(\lambda)$ *и*

$$L(\lambda_j) = \rho(\lambda_j)W_z(\lambda_j)^{-1}[I_{d_z} - U(\lambda_j)] - R(\lambda_j)CG(\lambda_j)E, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \quad \lambda_j = e^{i\theta_j}. \quad (12)$$

Регулятор (5) *с указанным полиномом L и полиномами* $M(\lambda)$ *и* $N(\lambda)$, *определенными в лемме* 1, *является TH-универсальным. Любой другой TH-универсальный регулятор эквивалентен одному из регуляторов указанного вида.*

З а м е ч а н и е. Если $E = 0$ (а значит, $U(\lambda) \equiv 0$), то предположение теоремы 4 $\det W_z(\lambda_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, необходимо для существования TH-универсального регулятора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-419) и ИНТАС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский А.А.* Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
2. *Ишлинский А.Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985.
3. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
4. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. L.: Prentice-Hall, 1989.
5. *Kwakernaak H., Sivan R.* Modern Signals and Systems. L.: Prentice-Hall, 1991.
6. *Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R.* Feedback Control Theory. N.Y.: Macmillan, 1992.
7. *Lindquist A., Yakubovich V.A.* // IEEE Trans. Automatic Control.1997. V. 42. № 6. P. 786–802.
8. *Линдквист А., Якубович В.А.* // ДАН. 1997. Т. 352. № 3. С. 314–317.