Lösningsförslag till inlämningsuppgifter vecka 1

Uppgift 1 Bestäm samtliga positiva heltalslösningar till ekvationen

$$ax + by = 2001.$$

Lösning: I vårt fall är $a = 49$ och $b = 22$, så ekvationen lyder

$$49x + 22y = 2001.$$

Vi kan använda Euklides algoritm för att bestämma den största gemensamma delaren mellan a och b.

$$\begin{aligned} 49 &= 2 \cdot 22 + 5 \\ 22 &= 4 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Den största gemensamma delaren är därmed 1 och om vi följer detta baklänges kan vi uttrycka 1 som $ma + nb$ för några heltal m och n.

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(22 - 4 \cdot 5) \\ &= 9 \cdot 5 - 2 \cdot 22 = 9(49 - 2 \cdot 22) - 2 \cdot 22 \\ &= 9 \cdot 49 - 20 \cdot 22 \end{aligned}$$

En lösning till ekvationen får vi om vi multiplicerar med 2001, vilket ger

$$2001 = 18009 \cdot 49 - 40020 \cdot 22.$$

Eftersom $\mathrm{sgd}(49, 22) = 1$ ges det enklaste sättet att kombinera 22 och 49 till 0 av $-22 \cdot 49 + 49 \cdot 22 = 0$. Slås detta samman med lösningen ovan fås samtliga lösningar som

$$\begin{cases} x &= 18009 - 22k \\ y &= -40020 + 49k \end{cases}$$

Inte alla dessa är positiva. För att både x och y skall vara positiva krävs att

$$\begin{cases} 0 &< 18009 - 22k \\ 0 &< -40020 + 49k \end{cases}$$

vilket betyder att k ska vara större än $18009/22$ men mindre än $40020/49$, dvs $k \in \{817, 818\}$. Sätter vi in dessa båda värden på k får vi $x = 13$, $y = 62$, respektive $x = 35$, $y = 13$.
Svar. Det finns två positiva lösningar $(x, y) = (13, 62)$ och $(x, y) = (35, 13)$.

Uppgift 2 Bestäm samtliga heltal n som uppfyller $0 < n < c$ och $\operatorname{sgd}(n, c) = 1$.

Lösning: Vi faktoriserar c för att se vilka primtal som delar c. Att $\operatorname{sgd}(n, c) = 1$ betyder att inget av dessa primtal delar n. Vi kan då sålla bort alla tal som är delbara med de primtal som delar c och kvar blir de tal som uppfyller $\operatorname{sgd}(n, c) = 1$. I vårt fall är $c = 108$. Vi faktoriserar c genom att pröva med alla primtal som är mindre än 10, och vi ser då att $108 = 2 \cdot 54 = 2^2 \cdot 27 = 2^2 \cdot 3^3$. Alltså skall vi sålla bort alla positiva heltal som är mindre än 108 och som är delbara med 2 eller 3. Vi får då kvar

$$\begin{gathered}1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55,\\ 59, 61, 65, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 89, 91, 95, 97, 101, 103, 107.\end{gathered}$$

Ett annat sätt att skriva upp dessa tal är som de tal mellan 0 och 108 som kan skrivas på formen $6m + 1$ eller $6m + 5$, för något heltal m. De m som kommer ifråga är $m = 0, 1, 2, \ldots, 17$.

Uppgift 3 Visa med hjälp av induktion att $n^3 - n$ är delbart med 3 för alla heltal n.

Lösning: Det räcker att visa påståendet för naturliga tal n, eftersom $(-n)^3 - (-n) = -(n^3 - n)$. Som basfall ser vi på $n = 0$ och vi har då att $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 - 0 = 0$, vilket är delbart med 3 eftersom $0 = 3 \cdot 0$.

Vi antar nu att vi vet att $k^3 - k$ är delbart med 3. Vi vill visa att det då följer att $(k+1)^3 - (k+1)$ är delbart med 3. Vi ser att

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k+1)(k^2+2k+1) - (k+1) = k^3+3k^2+3k+1-(k+1) = k^3-k+3(k^2+k)$$

Eftersom vi antagit att $k^3 - k$ är delbart med 3 och $3(k^2 + k)$ uppenbart är delbart med 3 kan vi sluta oss till att även summan av dem, dvs $(k + 1)^3 - (k + 1)$ är delbart med 3.

Enligt induktionsprincipen följer nu att $n^3 - n$ är delbart med 3 för alla icke-negativa heltal n och enligt den första kommentaren gäller det då för alla heltal n.

Uppgift 4 En talföljd, $a_1, a_2, a_3, \ldots$, är rekursivt definierad av $a_1 = a$, $a_2 = b$, och $a_{n+1} = ca_n + a_{n-1}$, för $n > 1$. Visa att $\operatorname{sgd}(a_{n+1}, a_n) = \operatorname{sgd}(a, b)$ för alla positiva n.

Lösning: Alla heltal som delar a_n och a_{n-1} delar också $ca_n + a_{n-1}$, och därmed även a_{n+1}. Eftersom vi kan skriva $a_{n-1} = a_{n+1} - ca_n$ har vi på samma sätt att alla gemensamma delare mellan a_{n+1} och a_n också måste dela a_{n-1}. Speciellt måste den största gemensamma delaren mellan a_{n+1} och a_n dela a_{n-1} och den största gemensamma delaren mellan a_n och a_{n-1} måste dela a_{n+1}. Vi får därmed att $\operatorname{sgd}(a_n, a_{n+1}) = \operatorname{sgd}(a_n, a_{n-1})$.

Vi kan nu visa påståendet med induktion. Om vi antar att $\operatorname{sgd}(a_{n-1}, a_n) = \operatorname{sgd}(a, b)$ får vi att $\operatorname{sgd}(a_n, a_{n+1}) = \operatorname{sgd}(a_{n-1}, a_n) = \operatorname{sgd}(a, b)$. Dessutom gäller att $\operatorname{sgd}(a_1, a_2) = \operatorname{sgd}(a, b)$, eftersom $a_1 = a$ och $a_2 = b$. Därför gäller enligt induktionsprincipen att $\operatorname{sgd}(a_{n+1}, a_n) = \operatorname{sgd}(a, b)$ för alla positiva n.