Hemtal 2 — facit

Förslagen nedan är bara förslag. Det finns många andra sätt att lösa uppgifterna som är lika bra eller bättre. En bild säger oftast mer en tusen ord, vilket inte utnyttjats i dessa lösningar.

I vissa av exemplen har använts tal, som genererats av Niklas Eriksens födelsedatum.

Tal 1

Fråga Hur många n-siffriga telefonnummer har en siffra som förekommer flera gånger? (Eftersom vi avser telefonnummer utan riktnummer kan de inte börja med 0.)

Svar Vi börjar med att beräkna totala antalet telefonnummer som har upprepade siffror, inklusive de som börjar med 0. Vi räknar sedan bort de med denna egenskap.

Det enklaste sättet att lösa denna uppgift är att beräkna totala antalet telefonnummer med n siffror, och sedan räkna bort dem utan upprepade siffror. Det som återstår är då alla telefonnummer med minst en upprepad siffra.

När vi väljer telefonnummer godtyckligt kan varje siffra väljas oberoende bland 10 alternativ. Antalet telefonnummer blir då 10^n.

När vi väljer telefonnummer utan upprepade siffror har vi 10 alternativ för första siffran. Den efterföljande siffran får inte vara samma som första, så endast 9 alternativ återstår. På samma sätt ser vi att antalet alternativ för tredje siffran är 8, och det fortsätter sedan analogt. Antalet telefonnummer utan upprepade siffror blir $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (10 - (n-1)) = (10)_n$.

Totala antalet telefonnummer med upprepade siffror blir således $10^n - (10)_n$.

Gör vi samma beräkningar, men kräver att första siffran ska vara 0 får vi att totala antalet sådana telefonnummer är 10^{n-1} (första siffran än denna gång inte valfri) och antalet sådana telefonnummer utan upprepade siffror blir $(9)_{n-1}$.

Totalt fås nu $10^n - (10)_n - (10^{n-1} - (9)_{n-1}) = 9(10^{n-1} - (9)_{n-1})$.

Tal 2

Fråga Ange med cykelnotation den permutation p som uppfyller $ps = st$, där $s = 10\ 4\ 1\ 5\ 9\ 8\ 3\ 2\ 7\ 6$ och $t = 2\ 8\ 4\ 6\ 7\ 9\ 10\ 3\ 5\ 1$.

Svar Vi börjar med att skriva om s och t på cykelnotation. Det element som element a avbildas på skrivs direkt efter a i samma cykel. I s ser vi att 1 avbildas på 10 (10 står i position 1 i s), som avbildas på 6 (står på position 10), som avbildas på 8 o.s.v. Alla element hamnar faktiskt i samma cykel, som skrivs $(1\ 10\ 6\ 8\ 2\ 4\ 5\ 9\ 7\ 3)$. För t får vi cykeln $(1\ 2\ 8\ 3\ 4\ 6\ 9\ 5\ 7\ 10)$.

Alla permutationer är bijektiva funktioner, så de har invers. Vi akn alltså skriva $ps = st \implies p = sts^{-1}$. I cykelnotation är det enkelt att beräkna inversen — det element som avbildas på ett element a står framför a, så inversen fås om man läser varje cykel baklänges. Vi får $s^{-1} = (1\ 3\ 7\ 9\ 5\ 4\ 2\ 8\ 6\ 10)$.

Det återstår nu bara att multiplicera permutationerna. Då följer vi varje element genom cyklerna från höger till vänster. Detta ger

$$\begin{aligned} p &= (1\ 10\ 6\ 8\ 2\ 4\ 5\ 9\ 7\ 3)(1\ 2\ 8\ 3\ 4\ 6\ 9\ 5\ 7\ 10)(1\ 3\ 7\ 9\ 5\ 4\ 2\ 8\ 6\ 10) \\ &= (1\ 5\ 8\ 7\ 9\ 3\ 6\ 10\ 4\ 2). \end{aligned}$$

Tal 3

Fråga Hur många positiva heltal mindre än 2001 finns det, som inte är delbara med 6, 11 och 16?

Svar Om vi från totala antalet heltal som är mindre än 2001 drar bort de som är delbara med 6, 11 och 16 i tur och ordning, så kommer vi att dra bort de tal som är delbara med t.ex. både 6 och 11 två gånger. För att kompensera för detta måste antalet sådana tal läggas till. Detta gör dock att de tal som är delbara med alla tre talen inte har dragits bort någon gång, så vi måste dra bort antalet sådana tal. Lösningen av detta bygger således på sållprincipen.

Vi betecknar med A_S de element som delas av samtliga tal i mängden $S \subseteq \{6, 11, 16\}$ och vi sätter $b_S = |A_S|$. Vi betecknar med α_i summan av samtliga b_S där $|S| = i$. Enligt sållprincipen ges nu antalet element som inte ligger i någon av mängderna A_S av $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$. Vi måste nu beräkna dessa.

Man ser direkt att $\alpha_0 = 2000$, eftersom det inte finns några restriktioner på talen i $A_\emptyset$. Antalet tal som delas av 6 ges av $\lfloor \frac{2000}{6} \rfloor = 333$, och totalt fås $\alpha_1 = \lfloor \frac{2000}{6} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{11} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{16} \rfloor = 333 + 181 + 125 = 639$.

Antalet tal som delas av två tal ges av antalet tal som delas av deras minsta gemensamma nämnare, vilket är deras produkt delad med deras största gemensamma delare. Motsvarande gäller antalet tal som delas av samtliga tre tal. Vi får $\alpha_2 = \lfloor \frac{2000}{6 \cdot 11} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{6 \cdot 16/2} \rfloor + \lfloor \frac{2000}{11 \cdot 16} \rfloor = 30 + 41 + 11 = 82$ och $\alpha_3 = \lfloor \frac{2000}{6 \cdot 11 \cdot 16/2} \rfloor = 3$.

Därmed fås $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2000 - 639 + 82 - 3 = 1440$.

Tal 4

Fråga När man spelar Alfapet börjar man med att välja 7 brickor av de 105 brickor som finns. Sedan ska den som börjar lägga ut ett ord. Hur stor är sannolikheten att den som börjar kan lägga ut just ordet Alfapet? Det finns 8 st A, 5 st L, 3 st F, 3 st P, 9 st E och 7 st T.

Svar Sannolikheten att något sker kan beräknas genom att dela antalet sätt det kan ske på med totala antalet alternativ. I detta fall ska vi dela antalet sätt att bland 105 brickor välja brickor så att vi kan lägga ut Alfapet med antalet sätt att välja 7 brickor bland 105 brickor. Det senare är val utan återläggning, och antalet ges av $(105)_7$.

För att kunna lägga ut ordet Alfapet måste man ha fått två A och en av var och en av de övriga bokstäverna i Alfapet. Eftersom brickor med likadana bokstäver inte är särskiljbara målar vi dem så de blir särskiljbara. Då kan två A väljas på $\binom{8}{2}$ (val utan repetition, oordnat), ett L på $\binom{5}{1} = 5$ sätt, o.s.v. Dessutom kan dessa element väljas i 7! olika ordningar.

Totala antalet val är naturligtvis $(105)_7$, eftersom det rör sig om ett ordnat val, utan repetition (vi har forfarande kvar målarfärgen som särskiljer bitar med samma bokstav).

Sannoliheten blir enligt detta

$$\frac{\binom{8}{2}\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}\binom{7}{1}7!}{(105)_7} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7}{2\binom{105}{7}} \approx 3.49 \cdot 10^{-6}.$$