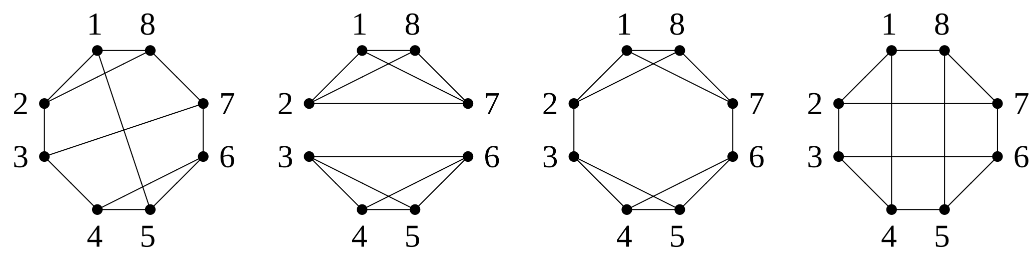
Lösningsförslag till inlämningsuppgifter vecka 5

Nedanstående lösningar har hållits korta och av naturliga skäl är figurerna få och utan färg. Lösningarna är alltså inte optimala.

Uppgift 1 Avgör vilka av graferna 1, 2, 3 och 4 som är isomorfa. Se till att motivera ordentligt. (Graferna är givna med grannmatriser som har en etta i position (i,j) om det går en kant mellan hörn i och hörn j, annars en nolla.)

Lösning: Om vi ritar ut graferna på lämpligt sätt får vi följande bilder.



Vi ser att andra grafen inte är sammanhängande (det går inga kanter mellan $\{1,2,7,8\}$ och $\{3,4,5,6\}$), vilket de tre andra är. Sista grafen är bipartit (man kan färga de udda röda och de jämna blå), vilket inte gäller för någon annan (samtliga andra innehåller 3-cykler ($\{1,2,8\}$ i både första och tredje). För att slutligen avgöra om första och tredje grafen är isomorfa så ser vi att den tredje har åtminstonde 4 3-cykler ($\{1,2,8\}$, $\{1,7,8\}$, $\{3,4,5\}$ och $\{4,5,6\}$), medan den första inte har mer än två. Detta ser man på följande sätt. En 3-cykel kan inte ha alla kanter på periferin (kant mellan i och $i+1$). Den kan inte heller ha noll kanter på periferin (eftersom det ska gå två kanter från varje hörn i en 3-cykel och det från varje hörn i grafen går endast en kant som inte ligger på periferin) eller en kant på periferin (då måste från ett hörn i 3-cykeln gå två kanter som inte ligger på periferin). Alltså har 3-cyklerna två kanter på periferin och en som inte ligger där, och denna kant måste gå två steg fram eller tillbaka längs periferin, vilket är uppfyllt endast av kanten mellan 4 och 6 och kanten mellan 2 och 8.

Vår slutsats är således att graferna inte är isomorfa.

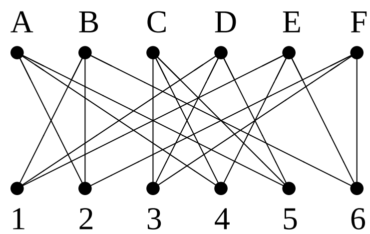
Uppgift 2 Utöka den givna latinska rektangeln till en fullständig latinsk kvadrat med hjälp av metoden som ges i bevisen för satserna 10.2 och 10.3 i kursboken.

Lösning: Den latinska rektangeln ges av
$$\begin{array}{cccccc} F & D & A & B & E & C \\ C & E & B & D & F & A \\ A & C & E & F & B & D \end{array}$$

Enligt sats i Biggs kan den kompletteras till latinsk kvadrat, eftersom samtliga påbörjade rader är fyllda. För att konstruera denna latinska kvadrat skapar vi en bipartit graf med hörnmängd X som ges av de element vi fyller i kvadraten (A, B, C, D, E, F) och hörnmängd Y som ges av kolumnerna. Vi drar en kant mellan x och y om element x ännu inte finns i kolumn y. Grafen ges nedan.

Att välja rader till elementen svarar nu mot att färga den bipartita grafen med tre färger, en för varje rad som återstår. Så länge det finns kanter kvar som giltigt kan färgas med någon av de tre färgerna så gör vi detta. Om inga sådana kanter finns, men några kanter fortfarande inte är ifyllda, så använder vi följande algoritm.

Leta rätt på en icke ifylld kant med hörn x och y. Låt α vara en färg som inte använts till någon kant från x och β motsvarande för y. Låt y_1 vara det hörn som den β-färgade kanten från x går till. Om y_1 har α-färgad kant, kalla det hörn kanten går till för x_1. Om denna har β-färgad kant, kalla det hörn den kanten går till för y_2. Fortsätt tills vi finner hörn vars kanter inte är färgade med båda färgerna. Byt nu i den stig vi fått alla α-färgade kanter till β och vice versa. Då finns en färg som kanten mellan x och y kan färgas med.



Uppgift 3 Utöka matchningen nedan till en fullständig matchning, genom att använda den metod som ges i avsnitt 10.4 i kursboken.

Lösning: Se kursboken.

Uppgift 4 En m-partit graf är en graf som kan färgas med m färger. Bipartita grafer är alltså 2-partita. Om vi har en m-partit graf med v hörn, vilket är det maximala antalet kanter som grafen kan innehålla?

Lösning: Börja med att fördela hörnen så att det är v_i hörn som färgats med färg i, där $1 \leq i \leq m$ och $v_1 + \ldots + v_m = v$. Maximalt antal kanter får vi om vi låter en kant gå mellan varje par av hörn, som inte har samma färg.

För att räkna antalet kanter på ett bra sätt räknar vi kanterna två gånger, dvs för varje hörn räknar vi antalet grannar till hörnet, summerar sedan över alla hörn och delar slutligen med 2. Vi får

$$|E| = \frac{v_1(v - v_1) + v_2(v - v_2) + \ldots + v_m(v - v_m)}{2} = \frac{v^2 - (v_1^2 + \ldots + v_m^2)}{2}$$

Vilken fördelning av hörnen ger nu maximalt antal kanter? Vi använder Cauchy-Schwarz olikhet

$$\sum_{k=1}^{m} v_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{m} v_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)^{1/2}$$

med $b_k = 1$, vilket ger

$$\sqrt{m}\left(\sum_{k=1}^{m} v_k^2\right)^{1/2} \geq \sum_{k=1}^{m} v_k = v.$$

Med $v_i = v/m$ för alla i uppnås det minimala värdet, eftersom vi då har

$$\left(\sum_{k=1}^{m} v_k^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{v^2}{m^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{v^2}{m}\right)^{1/2} = \frac{v}{\sqrt{m}}.$$

Maximalt antal kanter ges därför av

$$\frac{v^2 - m\frac{v^2}{m^2}}{2} = \frac{v^2(1-\frac{1}{m})}{2}.$$