Diagnostiska prov, vecka 1-5

Följande fem uppgifter skulle kunna vara de första uppgifterna på en tentamen. Den som har godkänt från inlämningsuppgifterna behöver inte göra motsvarande uppgift på tentamen. Det är dock inte säkert att svårighetsgraden är exakt lika som vid en tentamen.

Rudimentär rättningsmall

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. Bara svar utan motivering. **0 poäng**
2. Bara räkningar och svar utan motiverande text. **1 poäng**
3. Mycket bristande motivering. **1 poäng**
4. Något bristande motivering eller svårläst lösning. **2 poäng**
5. Tillfredsställande motivering och framställning. **3 poäng**

Utöver detta kommer att det är väsentligt att ha rätt svar om det går lätt att kontrollera svaret, exempelvis genom att sätta in en lösning i en ekvation, eller på annat sätt se om svaret verkar rimligt.

Observera att facit inte är lösningsförslag.

1 Prov ett

1. Omvandla talet 204 från basen fem till basen sexton.
2. Det finns $\binom{52}{5}$ olika kombinationer av fem kort från en kortlek. Hur många av dessa har ett tretal?
3. Beräkna 5^{453} i $\mathbf{Z}_{21}$.
4. Faktorisera $x^3 + 4x + 1$ som en produkt av irreducibla faktorer i $\mathbf{Z}_5$.
5. Använd Halls kriterium för att avgöra om det finns någon fullständig matchning i den bipartita grafen med hörnmängd $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{A, B, C, D\}$ och kantmängd
$$\{1B, 1D, 2A, 2C, 3C, 4A, 4D, 5C\}.$$

Facit ett

1. $(204)_5 = (36)_{16}$.
2. $13 \cdot 4 \cdot \binom{48}{2} = 58656$ om vi godtar även de som har kåk, annars $13 \cdot 4 \cdot \binom{12}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 54912$. Om vi dessutom godtar även de som har fyrtal får vi lägga på 624 till 59280.
3. $5^{453} = 20$ i $\mathbf{Z}_{21}$.
4. $x^3 + 4x + 1 = (x + 2)(x^2 + 3x + 3)$ i $\mathbf{Z}_5[x]$.
5. Halls kriterium säger att det finns en fullständig matchning om och endast om det för varje delmängd av den mindre hörnmängden finns minst lika många hörn på andra sidan som har kant till något av de utvalda hörnen. Vi kan i det här fallet se att det finns en mängd $\{A, B, D\}$ som har gemensamma grannar $\{1, 2, 4\}$ och i en fullständig matching måste dessa matchas med varandra, och C med 3 eller 5. Vidare har B bara en granne och måste matchas med denna. Kvar har vi $\{A, D\}$ och dessa kan matchas med $\{2, 4\}$. Det finns alltså i det här fallet en fullständig matchning $\{1B, 2A, 3C, 4D\}$.

2 Prov två

1. Avgör ifall 346 och 573 har några gemensamma delare. Vilken är den största gemensamma delaren?

2. Bevisa rekursionsformeln för binomialtal med hjälp av additionsprinicipen.

3. Använd sållprincipen för att bestämma $\phi(78)$.

4. Bestäm en permutation π som uppfyller $\sigma\pi = \pi\tau$, där $\sigma = (235)(46)$ och $\tau = (15)(364)$.

5. På hur många sätt kan man hörnfärga grafen G med k färger? Granntabellen för G ges av

1	2	3	4	5	6	7
7	6	4	3	7	2	1
		7			7	3
						5
						6

Facit två

1. $\mathrm{sgd}(346, 573) = 1$.

2. Vi ser på binomialtalet $\binom{n}{k}$ som antalet k-delmängder i en n-mängd, säg $\{1, 2, \dots, n\}$. Vi delar sedan upp denna mängd i två disjunkta delar; de delmänder som innehåller elementet n och de som inte innehåller n. Den första delen innehåller $\binom{n-1}{k-1}$ delmängder eftersom det finns så många sätt att välja ut de återstående $k - 1$ elementen. en andra delen innehåller $\binom{n-1}{k}$ delmängder eftersom vi nu skall välja alla k element från mängden $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Enligt additionspricipen är antalet element i unionen lika med summan av antalet element i de disjunkta delarna, vilket ger
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

3. $\phi(78) = 24 = 78-78/2-78/3-78/13+78/(2\cdot3)+78/(2\cdot13)+78/(3\cdot13)-78/(2\cdot3\cdot13)$.

4. $\pi = (145632)$ fungerar, men också fem andra - (143562), $(142)(56)$, $(1632)(45)$, (16542), $(162)(354)$.

5. Grafen är ett träd med sju hörn och kan hörnfärgas på $k(k-1)^6$ sätt med k färger.

3 Prov tre

1. Bestäm det minsta positiva heltal d sådant att det finns lösningar till den diofantiska ekvationen $273x + 354y = d$ och bestäm en lösning i detta fall.

2. Skriv följande booleska funktion på disjunktiv normalform och förenkla uttrycket med hjälp av de booleska räknelagarna.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3. Bestäm antalet surjektiva funktioner från $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ till $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Vad blir kvoten och resten vid division av $x^8 + x^2 + 2$ med $x^3 + 2x + 1$ i $\mathbf{Z}_3[x]$?

5. Fyll följande partiellt ifyllda latinska kvadrat med hjälp av kantfärgning av bipartita grafer.

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ E & C & D & B & A \\ B & D & E & A & C \end{array}$$

Facit tre

1. $d = 3$ och $x = -35$, $y = 27$ är en lösning. De övriga ges av $x = 118k - 35$, $y = 27 - 91k$.

2. $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = z + xy + \bar{x}\bar{y}$.

3. $16800 = 5! \cdot 140 = 5!S_{7,5}$.

4. Kvoten är $x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ och resten är 1.

5. De två sista raderna måste vara $DEACB$ och $CABED$ i någon ordning.