Kapitel 1

Uppgifter

1 Heltal

2 Mängder och funktioner

2.1 Betrakta funktionerna $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ och $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ som ges av

$$f(x) = x - 1$$

och

$$g(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Visa att

a $fg \neq gf$;

b det finns ett $x \in \mathbf{Z}$ sådant att $fg(x) = x$.

2.2 Institutionens för matematik doktorander spelar ofta backgammon. De har startat en serie, i vilken ställningen ges av följande tabell. Vinst ger en, två eller tre poäng.

Spelare	Matcher	Poäng
Tomas	7	8
Robert	8	8
Niklas	8	5
Jörgen	7	3

Betrakta följande funktionsliknande saker och avgör om de är funktioner.

a $f : \{Spelare\} \to \mathbf{N}$, som givet en spelare visar hur många poäng denne har.

b $g : \mathbf{N} \to \{Spelare\}$, som givet ett antal poäng visar vilken spelare som har dessa poäng.

c $h : \{Spelare\} \to \{2x : x \in \mathbf{N}\}$, som givet en spelare visar hur många poäng denne har.

2.3 Vilka av följande funktioner $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ är surjektiva, injektiva respektive bijektiva? För de som är bijektiva, bestäm deras invers.

a $f(x) = x + 6$

b $f(x) = x^3$

c $f(x) = 1729$

d $f(x) = \lceil \frac{x}{10} \rceil$, där $\lceil q \rceil$ är det minsta heltal k sådant att $k \geq q$

e $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{om } x = 2k, k \in \mathbf{Z}; \\ x-1, & \text{om } x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$

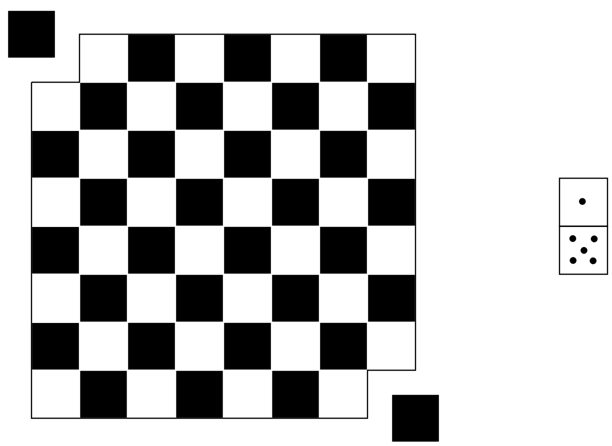
2.4 Fibonaccitalen definieras av funktionen $F : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,

$$F(1) = 1,\ F(2) = 2, \qquad F(n) = F(n-1) + F(n-2),\ n \geq 2.$$

(Med $\mathbf{N}$ menas här de naturliga talen enligt Biggs, d.v.s. utan 0.) Är denna funktion injektiv, surjektiv eller bijektiv?

2.5 Bestäm antalet element i mängden $A = \{7, 8, 15, 34, 71, 132\}$ genom att finna en bijektion från $\mathbf{N}_n$ till A för lämpligt n.

2.6 Från ett schackbräde har två diametralt motsatta hörnrutor tagits bort. Kan de återstående 62 rutorna täckas av 31 dominobrickor?



2.7 KTHs rektor har ofta många papper på sitt bord. För att inte förlägga några papper försöker han se till, att inget papper helt kan täcka något annat. Nu sitter han med $n+1$ rektangulära papperslappar framför sig, vars kantlängder är heltal mellan 1 och $2n$. Visa att det bland rektors lappar finns två så att den ena helt täcker den andra.

2.8 I en backgammonstege måste man spela minst en match per dag. Visa att om man spelar 40 matcher på 28 dagar, så finns det en följd av dagar, som man spelar exakt 15 matcher.

2.9 Visa att mängden A av naturliga tal som inte är primtal är oändlig.

2.10 Visa att mängden A av jämna heltal är oändlig.

2.11 Visa att mängden $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ av par av heltal är uppräknelig.

3 Kombinatorikens grunder

3.1 Boken *Discrete Mathematics* av Norman L. Biggs innehåller 463 sidor, fördelade på 20 kapitel. Visa att något kapitel innehåller minst 24 sidor.

3.2 Enligt en undersökning resovisad i TIME Magazine har franska män haft förhållanden med i genomsnitt elva kvinnor, medan franska kvinnor har förhållanden med i genomsnitt 3 män. I Frankrike bor ungefär 36 miljoner män. Om vi antar att dessa förhållanden huvudsakligen begränsat sig till nationella affärer, hur många människor bor det totalt i Frankrike?

3.3 På en trumpet kan man ändra tonhöjd dels genom att ändra läpparnas spänning, dels genom att trycka ned ventiler, vilket ändrar trumpetens längd. En vanlig trumpet har 3 ventiler, som kan vara i 2 lägen (nedtryckt eller ej nedtryckt). Hur många toner kan man maximalt få ur en trumpet utan att ändra läpparnas spänning, om varje ventilkombination ger olika toner (på de flesta trumpeter ger ventilerna 1 och 2 samma ton som tredje ventilen)?

3.4 Hur många möjliga registreringsskyltar för svenska bilar finns det, om man inte räknar med specialvarianter som bryter mot mönstret ABC 123, och om man inte räknar bort skyltar med kränkande eller på annat sätt olämlig text?

3.5 Man brukar hävda att om en melodi är bra, så känner man igen den på de fem första tonerna. Av detta följer att det inte finns två bra melodier, vars 5 första toner är exakt lika. Hur många bra melodier finns det? Vi räknar med att möjliga tonlängder är helnot, halvnot, fjärdedelsnot, åttondelsnot, åttondelstriol samt sextondelsnot (6 alternativ), samt att vi håller oss inom en oktav uppåt och nedåt från starttonen (sammanlagt 25 möjliga tonhöjder, 12 över och 12 under starttonen).

3.6 Till en middagsbjudning har bjudits n par. På hur många sätt kan gästerna placeras kring ett runt bord, om de ska sitta enligt gängse standard, d.v.s. att herrar och damer sitter alternerande?

3.7 Om morgonen klär KTHs rektor på sig byxor, polotröja, strumpor, skor, kavaj samt hatt. Dessa plagg kan tas på i olika följd, men rektor är noga med att alltid ta på sig polotröjan innan kavajen, och skorna kommer alltid efter såväl strumpor som byxa. På hur många sätt kan rektor klä sig?

4 Delmängder

4.1 Vi vill fylla en takt med toner. Takten rymmer 4 fjärdedelar och vi vill lägga in 6 toner. Vi tillåter bara att tonerna börjar på jämna sextondelar samt att alla toner tas från samma oktav (12 toner finns att välja bland). På hur många sätt kan detta göras?

4.2 Två personer spelar ett spel med lika vinstsannolikhet för spelarna i varje omgång. Först till 6 poäng vinner och spelare A leder med 5 mot 3. De tvingas nu avsluta spelet i förväg. Hur ska vinstpotten fördelas? Hur ser det ut i det allmänna fallet?

5 Partitioner och distributioner

5.1 Visa att
$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k! S(n,k) = m^n.$$

5.2 Visa att
$$S(n,k) = \sum_S \prod_{i \notin S} |\{j \in S : j > i\}|,$$
där summan löper över alla delmängder S av $[n]$ med exakt k element.

5.3 Visa kombinatoriskt, d.v.s. genom att beskriva vad höger- och vänsterled räknar, att
$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$$
och
$$S(n,n-1) = \binom{n}{2}.$$

5.4 Låt relationen $\sim$ på $A = \{x \in \mathbf{N} : x \geq 2\}$ definieras av att $x \sim y$ om det finns ett primtal p sådant att $p|x$ och $p|y$. Visa att $\sim$ inte är en ekvivalensrelation, men att om vi ändrar kriteriet till att p ska vara det största primtal som delar x respektive y så får vi en ekvivalensrelation. Vilka blir då ekvivalensklasserna?

5.5 Ur mängden [12] definierar vi ekvivalensrelationen $\sim$: $x \sim y$ om x och y har lika många bokstäver utskrivet som ord. Exempelvis är 1 relaterad till 3 (båda har tre bokstäver), men inte till 4. Visa att detta är en ekvivalensrelation och bestäm ekvivalensklasserna. Ge dessutom en enkel beskrivning av relationen som ger följande klasser:
$$\{1,11\}, \{2,3,10,12\}, \{4,5\}, \{6,7\}, \{8\}, \{9\}.$$

5.6 Hur många ord kan man bilda av bokstäverna i "parallella"?

5.7 I $\mathbf{Z}^2$ finns det $\binom{2n}{n}$ stigar från $(0,0)$ till (n,n), om man bara tillåter steg på formen $(1,0)$ eller $(0,1)$, det vill säga små steg uppåt eller åt höger. Det kan man se genom att konstatera att vi bland de $2n$ steg som krävs ska välja exakt n stycken åt höger. Hur många stigar finns det mellan $(0,0,0)$ och (n,n,n) i $\mathbf{Z}^3$ som bara använder steg på formen $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$? Hur många liknande stigar finns det mellan $(0,0,\ldots,0)$ och $(n_1,n_2,\ldots,n_d)$ i $\mathbf{Z}^d$?

5.8 Till ett kodlås med 4 knappar, numrerade 0 till 3, finns $4^6 = 4096$ koder av längd 6. Hur många av dessa innehåller samtliga siffror?

5.9 Givet $\alpha = 3\ 5\ 4\ 1\ 7\ 8\ 9\ 6\ 2$ och $\beta = 9\ 5\ 2\ 3\ 4\ 7\ 8\ 9\ 1$, finn σ så att $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$.

5.10 Låt $\alpha, \beta \in S_n$ vara två konjugata permutationer. Om $\sigma \in S_n$ är sådan att den demonstrerar konjugatskapet, det vill säga att $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$, visa att även $\sigma\alpha$ och $\beta\sigma$ demonstrerar konjugatskapet.

5.11 En **granntransposition** i en permutation $\pi \in S_n$ är en transposition av två element som står bredvid varandra. Visa att vi alltid kan omvandla en permutation till en annan permutation av samma storlek med hjälp av granntranspositioner.

5.12 Antalet granntranspositioner som behövs för att omvandla en permutation $\pi \in S_n$ till identitetspermutationen kan räknas ut på ett enkelt sätt. Hur gör man?

Hur många granntranspositioner behövs för att ordna $\pi = 3\ 5\ 2\ 6\ 4\ 1$.

5.13 Skriv permutationen $\pi = (13)(26)(37)(36)(25)(74)(14)$ i disjunkta cykler.

6 Modulär aritmetik

8 Grafer

10 Bipartita grafer och matchningar

10.1 Platonska kroppar är kroppar i $\mathbf{R}^3$, som består av enbart liksidiga k-hörningar. Exempel på dessa är kuben (liksidiga 4-hörningar (kvadrater), 3 vid varje hörn) och oktagonen (liksidiga trianglar, 4 vid varje hörn).

Visa att det inte finns fler än fem platonska kroppar i $\mathbf{R}$ genom att använda Eulers formel $v - e + f = 2$ för planära grafer (v är antalet hörn, e antalet kanter och f antalet facetter (ytor)). I detta fall blir v, e och f antalet hörn, antalet kanter och antalet n-hörningar i kroppen.

10.2 I kapitel 10.1 i Biggs slås följande sats fast: Givet den bipartita grafen $G = (X \cup Y, E)$ gäller

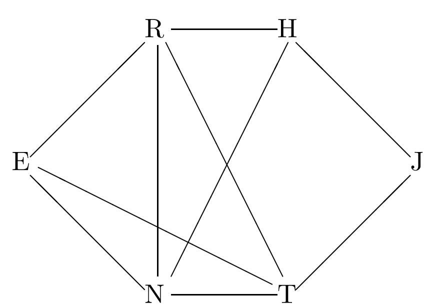
$$\sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y) = |E|.$$

Använd detta för att bevisa sats 3.2 i Biggs: Givet två mängder X och Y och en delmängd S av $X \times Y$ gäller

$$\sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S) = |S|,$$

där $r_x(S)$ är antalet element i S, som har x som första komponent och $c_y(S)$ är antalet element i S med y som andra komponent.

10.3 Niklas, Tomas, Erika, Jörgen, Robert och Håkan ska möta varandra i Backgammon enligt nedan ritade graf, där en kant innebär att de två personerna som kanten sammanbinder ska mötas. Hur många omgångar krävs för att alla ska kunna spela sina matcher? Under en omgång kan godtyckligt många matcher spelas, men varje spelare kan bara delta i en match per omgång.



13 Grupper

15 Ringar och kroppar

17 Felrättande koder

18 RSA

19 Boolesk algebra

Kapitel 2

Ledningar

1 Heltal

2 Mängder och funktioner

2.5 Finn bijektion till $B = \{0, 1, 8, 27, 64, 125\}$ och utnyttja att sammansättningen av två bijektioner är en bijektion.

2.6 Betrakta rutornas färger.

2.8 Låt x_i vara antalet matcher spelade efter i dagar. Betrakta mängderna $A = \{x_i\}_{i=1}^{28}$ och $B = \{x_i + 15\}_{i=1}^{28}$. Får dessa innehålla lika tal?

2.9 Finn en injektion från mängden av primtal till A.

2.11 Fyll första kvadranten med naturliga tal på lämpligt sätt.

3 Kombinatorikens grunder

4 Delmängder

4.2 Beräkna hur många omgångar som måste spelas innan någon garanterat har vunnit och i hur många fall A respektive B vinner.

5 Partitioner och distributioner

5.4 Det är transitivitetsegenskapen som inte är uppfylld i första fallet.

5.5 Till sista uppgiften: läs talen i varje klass högt.

5.8 Visa att sådana koder kan ses som surjektioner från mängden av positioner i koden (6 stycken) till mängden av knappar (4 stycken).

5.9 Skriv om till cykelnotation och para ihop cykler av lika storlek.

5.12 I identitetspermutation har ett element inga större element till vänster och inga mindre till höger. Det innebär att alla större element till vänster måste förbi det element vi tittar på. Hur många granntranspositioner krävs för detta?

6 Modulär aritmetik

8 Grafer

10 Bipartita grafer och matchningar

10.1 Använd bipartita grafer, där kanterna är relationer mellan näraliggande hörn och kanter, respektive näraliggande n-hörningar och kanter.
10.3 Kantfärgning!

13 Grupper

15 Ringar och kroppar

17 Felrättande koder

18 RSA

19 Boolesk algebra

Kapitel 3

Lösningar

1 Heltal

2 Mängder och funktioner

2.1 a Vi ser exempelvis att $fg(0) = f(g(0)) = f(3) = 2$, men $gf(0) = g(f(0)) = g(-1) = 6 \neq 2$. Funktionerna kan alltså inte vara lika.

b Bästa sättet att visa att detta x existerar är att finna det (det kan finnas flera). Vi vill ha $x = fg(x) = f(x^2 - 2x + 3) = x^2 - 2x + 2$, vilket är ekvivalent med $x^2 - 3x + 2 = 0$. Detta uppfylls av $x = 1$ och $x = 2$.

2.2 a Det är en giltig funktion. För varje spelare finns ett unikt poängantal som ligger i målmängden.

b Detta är inte en giltig funktion, eftersom det kan finnas flera spelare som har samma poäng. Exempelvis är $g(8)$ inte entydigt definierat.

c Detta är inte en giltig funktion, eftersom $h(Niklas) \notin \{2x : x \in \mathbf{N}\}$.

2.3 a Det står klart att $f(x) = x + 6$ inte avbildar två tal på samma tal, ty $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 6 = x_2 + 6 \Rightarrow x_1 = x_2$. Det är även lätt att visa att det för varje $y \in \mathbf{Z}$ finns ett $x \in \mathbf{Z}$ så att $f(x) = y$; tag $x = y - 6$. Funktionen är alltså bijektiv och inversen ges av den sista beräkningen: $f^{-1}(y) = y - 6$.

b Funktionen $f(x) = x^3$ är injektiv, eftersom $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3$. Däremot är den inte surjektiv, eftersom exempelvis ekvationen $x^3 = 2$ saknar heltalslösning.

c Funktionen $f(x) = 1729$ är uppenbarligen varken injektiv eller surjektiv. Vi ser att funktionen aldrig antar värdet 0 (eller något annat värde förutom 1729) samt att $x_1 \neq x_2$ inte medför $f(x_1) \neq f(x_2)$.

d Här har vi en funktion $f(x) = \lceil \frac{x}{10} \rceil$ som är surjektiv men inte injektiv. Det senare följer av att $f(1) = \lceil \frac{1}{10} \rceil = 1 = \lceil \frac{2}{10} \rceil = f(2)$. Det förra följer av att $f(10y) = y, \forall y \in \mathbf{Z}$.

e Denna funktion avbildar jämna tal på det efterföljande talet och udda tal på det föregående. Talen i talparet $(2k, 2k + 1)$ avbildas således på varandra. Vi finner att funktionen är både injektiv och surjektiv samt att inversen ges av funktionen själv.

2.4 Vi ser, med hjälp av induktion, att $F(n) > 0$ och därav följer att $F(n) = F(n-1)+F(n-2) > F(n-1)$, d.v.s. att varje tal är strikt större än sin föregångare. Därmed är $F(n)$ injektiv. Däremot är inte $F(n)$ surjektiv, eftersom $F(n) = 4$ saknar lösning ($F(3) = 3$, $F(4) = 5$ och för $n > 4$ gäller $F(n) > F(4)$).

2.5 Den enklaste lösningen är att skriva $f(1) = 7, f(2) = 8, f(3) = 15, f(4) = 34, f(5) = 71$ och $f(6) = 132$. Det är dock snyggare att försöka finna ett enkelt uttryck för bijektionen.

Låt $B = \{0, 1, 8, 27, 64, 125\}$. Funktionerna $f : \mathbf{N}_6 \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(x) = x - 1$ och $g : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to B$, $f(x) = x^3$ är bijektioner. Vi använder sedan bijektionen $h : B \to A$, $h(x) = x + 7$ för att finna bijektionen $(hgf)(x) = (x - 1)^3 + 7$.

2.6 Vi har 32 vita rutor och 30 svarta. Varje dominobricka täcker en vit och en svart ruta. Om vi täcker brädet med 31 dominobrickor måste, enligt duvslagsprincipen, två vita rutor täckas av samma dominobricka, vilket är omöjligt.

2.7 Om två lappar båda har en kant av längd d, så täcker den ena lappen den andra. Om två lappar båda är kvadratiska,så täcker den större lappen den mindre. Av detta följer att om inga lappar ska täcka varandra, så får maximalt en vara kvadratisk och inget par av lappar får ha någon kantlängd gemensam. Endast en kantlängd får förekomma två gånger — det är den på den tillåtna kvadratiska lappen. De $n + 1$ lapparna har sammanlagt $2n + 2$ kantlängder, och endast $2n + 1$ stycken är möjliga, inklusive den som förekommer två gånger. Enligt duvslagsprincipen finns det således två lappar med samma kantlängd, eller två kvadratiska lappar. Därför finns två lappar som täcker varandra.

2.8 Låt x_i vara antalet matcher som man har spelat efter i dagar. Eftersom man spelar minst en match per dag gäller $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. Mängden $A = \{x_i\}_{i=1}^{28}$ innehåller därför 28 olika tal. Av detta följer att $i \neq j \Rightarrow x_i + 15 \neq x_j + 15$, så mängden $B = \{x_i + 15\}_{i=1}^{28}$ innehåller också 28 olika tal.

Om något tal i A är lika med något tal i B så finns det en följd av dagar, under vilka man spelar exakt 15 matcher. Nu vet vi att de 56 talen i mängderna A och B ligger mellan 1 och $40 + 15 = 55$, så enligt duvslagsprincipen finns två lika tal i dessa mängder. De två lika talen kan inte ligga i samma mängd. Alltså finns en följd av dagar, under vilka man spelar 15 matcher.

2.9 Vi ska finna en injektion från $\mathbf{N}$ till A. Vi vet att det finns en injektion från $\mathbf{N}$ till mängden av primtal P så det räcker att finna en injektion $f : P \to A$ (sammansättningen av två injektioner är en injektion). Vi definierar nu f således: Om p är ett udda primtal, så sätter vi $f(p) = p+1 \in A$. För det jämna primtalet 2 låter vi $f(2) = 1 \in A$. Eftersom endast 2 avbildas på 1 och $p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1 + 1 \neq p_2 + 1 \Rightarrow f(p_1) \neq f(p_2)$ för udda primtal p_1 och p_2, följer att f är en injektion.

2.10 Vi ska finna en injektion från $\mathbf{N}$ till A. Man ser att en sådan injektion ges av $f : \mathbf{N} \to A$, $f(x) = 2x$. För att visa att f är en injektion konstaterar vi att $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.11 Vi ska finna en bijektion från $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ till $\mathbf{N}$. Vi börjar med att avbilda de par (x, y) vars avstånd $d = x + y$ till origo är 0. Därefter följer de på avstånd 1, avstånd 2 o.s.v. Bland paren på avstånd d väljer vi (helt godtyckligt) att börja med dem som har stor andra komponent. Utfyllnaden ges av nedanstående figur.

5						
4	10					
3	6	11				
2	3	7	12			
1	1	4	8	13		
0	0	2	5	9	14	
	0	1	2	3	4	5

För att ge en explicit formel för hur bijektionen fungerar noterar vi att på avstånd $d = x + y$ finns $d + 1 = x + y + 1$ par. Antalet element innan en viss nivå d blir alltså $1 + 2 + 3 + \ldots + d$. Använder vi formeln för aritmetisk summa och ersätter d med $x + y$ får vi

$$f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x.$$

Enligt denna funktion kan vi fylla **hela** rutnätet $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ med de naturliga talen.

3 Kombinatorikens grunder

3.1 Detta följer direkt av den generaliserade duvslagsprincipen. Eftersom $23 \cdot 20 = 460 < 463$ måste något kapitel innehålla 24 sidor.

3.2 Låt X vara mängden av franska män och Y mängden av franska kvinnor. Definiera $S \subset X \times Y$ som mängden av de par (x, y) sådana att x och y haft ett förhållande. Sats 3.2 säger att $r|X| = c|Y|$, där vi har $r = 11$, $c = 3$ och $|X| = 36$ miljoner enligt notationen i Biggs. Detta ger $|Y| = \frac{11 \cdot 36 \cdot 10^6}{3} = 132 \cdot 10^6 \Rightarrow |X| + |Y| = 168 \cdot 10^6$.

3.3 Varje ventil har 2 positioner och vi har 3 ventiler. Alltså är totala antalet konfigurationer $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

3.4 För bokstäverna finns 29 alternativ, för siffrorna 10. Vi får således $29^3 \cdot 10^3 = 24\ 389\ 000$ möjliga skyltar.

3.5 För starttonen behöver vi bara bestämma längd och inte höjd. För övriga toner måste båda parametrarna bestämmas. Vi får alltså att antalet melodier blir $6^5 \cdot 25^4 = 3^5 \cdot 5^3 \cdot 10^5 = 243 \cdot 125 \cdot 10^5 = 3\ 037\ 500\ 000$.

3.6 Vi måste först bestämma vilka av stolarna som damerna ska sitta på. Här finns bara två alternativ, eftersom man sitter alternerande. Vi kan sedan placera herrar och damer oberoende av varandra. Varje placering av herrarna är en permutation av dessa, och eftersom antalet herrar är n är antalet sådana permutationer $n!$. Detsamma gäller för damerna, så totala antalet blir $2 \cdot n! \cdot n! = n!^2$.

3.7 Totala antalet sätt att klä sig är $6! = 720$ (varje följd är en permutation av de sex klädesplaggen). Ett stort antal av dessa är inte tillåtna (skor före strumpor, etc.). Betrakta en tillåten permutation av klädernas ordning, t.ex. följden `hatt - tröja - strumpor - byxor - kavaj - skor`. Till varje sådan följd hör en följd, där alla element hålls fixa, utom kavaj och tröja, som byter plats (i detta fall får vi `hatt - kavaj - strumpor - byxor - tröja - skor`). Antalet sätt att placera tröja och kavaj är alltså $2! = 2$, varav ett är tillåtet. På samma sätt kan vi hålla alla element fixa, förutom strumpor, skor och byxor. Dessa kan varieras fritt på $3! = 6$ olika sätt, varav $2! = 2$ (skor sist) är tillåtna. Vi kan på detta sätt bilda disjunkta mängder av följder, inom vilka strumpor, skor, byxor, samt kavaj och tröja permuteras inbördes. Varje grupp innehåller $3!2! = 12$ permutationer, varav 2 är tillåtna. Resultatet blir således $\frac{6!}{12} = 120$.

4 Delmängder

4.1 Beträffande tonlängder så måste tonerna börja på 6 av de sexton platserna. Vi vet dessutom att den första tonen måste börja på den första platsen, så det återstår att placera 5 toner bland 15 platser. Detta kan göras på $\binom{15}{5}$ sätt. För var och en av de 6 tonerna har vi dessutom 12 tonhöjder att välja bland. Sammanlagt får vi alltså $\binom{15}{5} \cdot 12^6 = 8\ 966\ 909\ 952$.

4.2 För att spelet garanterat ska vara färdigt krävs ytterligare 3 omgångar. Om A vinner någon av dessa så vinner A totalt. Annars vinner B. Sannoliheten för det första är 7/8 och för det andra 1/8. Vinstpotten ska således fördelas efter proportionerna 7 : 8.

Låt oss nu se på det allmänna fallet. För att A ska vinna krävs a poäng och för B krävs b poäng. Sammanlagt räcker det att $c = a + b - 1$ omgångar spelas. Av dessa c omgångar vinner B om A får färre än a poäng. Dessa poäng kan fördelas på

$$\binom{c}{0} + \binom{c}{1} + \ldots + \binom{c}{a-1}$$

olika sätt. Om däremot A vinner har A fått minst a poäng, vilka kan fördelas bland omgångarna på

$$\binom{c}{a} + \binom{c}{a+1} + \ldots + \binom{c}{c}$$

olika sätt. Proportionerna för vinstdelningen blir således

$$\sum_{k=a}^{c} \binom{c}{k} : \sum_{k=0}^{a-1} \binom{c}{k}.$$

5 Partitioner och distributioner

5.1 Högerledet räknar antalet vektorer av längd n med element ur $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Vi ska alltså visa att vänsterledet räknar samma sak.

Vi börjar med att partitionera de n positionerna i vektorn i k delar. Detta kan göras på $S(n, k)$ olika sätt. Vi ska sedan använda endast ett tal till positionerna inom varje del, och två delar får inte använda samma tal. De k tal som används ska därför väljas ordnat bland m tal, vilket kan göras på $m(m-1)\ldots(m-k+1) = \binom{m}{k}k!$ sätt.

Med denna metod får vi varje vektor av längd n med element ur $[m]$ exakt en gång. Alltså är summan lika med m^n.

5.2 Vi vill inse varför högerledet räknar antalet partitioner av $[n]$ i k delar. Eftersom vi har delmängder S med k element är en naturlig gissning att varje del ska innehålla ett av dessa element. För att inte få dubbletter bestämmer vi nu att dessa utvalda element ska vara de största i varje del. Det återstår att placera ut resterande element i delarna. För varje element i har vi att välja bland de delar, som har större element i sig. Antalet sådana delar ges av $|\{j \in S : j > i\}|$. Vi multiplicerar sedan ihop antalet alternativ för varje element.

5.3 $S(n, 2)$ räknar antalet sätt att dela mängden $[n]$ i två icke-tomma delar. Vi börjar med att konstatera att elementet 1 kan placeras godtyckligt. Övriga element ges dock två alternativ: antingen i samma del som 1 eller i den andra delen. Dessa kan alltså placeras på 2^{n-1} olika sätt. Ett av dessa är dock förbjudet — alla element får inte ligga i samma del som 1. Sammantaget får vi $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

$S(n, n-1)$ räknar antalet sätt att dela $[n]$ i $n-1$ icke-tomma delar. Vi får då $n-2$ delar med ett element och en del med 2 element. Det räcker att veta dessa två element för att få partitionen, och de kan väljas på $\binom{n}{2}$ olika sätt.

5.4 Vi betraktar relationen $\sim$. Det är klart att den är reflexiv, eftersom det alltid finns ett primtal p som delar $x \in A$. Den är också symmetrisk, för om p delar x och y, så delar samma p även y och x.

Däremot är inte relationen transitiv. Som motexempel kan väljas $x = 2$, $y = 6$ och $z = 3$. Vi ser att primtalet 2 delar x och y, samt att primtalet 3 delar y och z, men $\text{sgd}(x, z) = 1$.

Om vi nu ändrar relationen $\sim$ till att $x \sim y$ om det största primtal p som delar x också är det största primtal p som delar y, så får vi en ekvivalensrelation. De första två egenskaperna visas som ovan. Återstår att visa att $\sim$ är en transitiv relation. Men om p_x är det största primtal som delar x och p_z är det största primtal som delar z, så ger $x \sim y$ och $y \sim z$ att $p_x = p_z$, eftersom båda dessa är det största primtal som delar y. Då har vi $x \sim z$, så relationen är transitiv.

Ekvivalensklasserna består av ett primtal p och produkter av p och primtal $q \leq p$.

5.5 Att relationen är reflexiv är klart, eftersom varje ord har lika många bokstäver som sig själv. Vi ser också att om två ord har lika många bokstäver så spelar det ingen roll i vilken ordning vi betraktar orden. Relation är alltså även symmetrisk. Transitivitet följer av att om x och y har k bokstäver, och z har lika många bokstäver som y, så har även z k bokstäver och $z \sim x$.

Ekvivalensklasserna är $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}, \{4, 8, 11, 12\}$.

Den andra relationen ges av att orden i en ekvivalensklass börjar med samma bokstav, exempelvis två, tre, tio, tolv.

5.6 Ordet “parallella” har 1 ’p’, 3 ’a’, 1 ’r’, 4 ’l’ och 1 ’e’. Vi kan se problemet som att vi ska avbilda varje position i det 10 bokstäver långa ordet på en av de fem bokstäverna på ett sådant sätt att en position avbildas på ’p’, 3 på ’a’ o.s.v. Antalet sådan funktioner ges av multinomialkoefficienterna. I detta fall blir svaret

$$\binom{10}{1,3,1,4,1} = \frac{10!}{1!3!1!4!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 25200.$$

5.7 Bland de $3n$ stegen ska vi välja n i riktningen $(1, 0, 0)$, n i riktningen $(0, 1, 0)$ och n i riktningen $(0, 0, 1)$. Detta är ett oordnat val och dessa räknas av multinomialkoefficienterna. Vi kan alltså göra detta på $\binom{3n}{n,n,n}$ olika sätt.

På motsvarande sätt ser vi i fallet $\mathbf{Z}^d$ att antalet stigar ges av

$$\binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_d}{n_1, n_2, \ldots, n_d},$$

eftersom vi bland alla stegen ska välja n_1 i första riktningen, n_2 i andra riktningen o.s.v.

5.8 Vi börjar med att gruppera positionerna i koden i fyra olika icke-tomma grupper, för att garantera att alla siffror kommer med. Detta kan göras på $S(6, 4)$ olika sätt. Sedan ska varje grupp tilldelas en siffra. Siffrorna kan fördelas helt fritt, dock utan upprepning, så antalet sätt att göra detta blir 4!. Sammanlagt blir antalet koder $4!S(6, 4) = 24 \cdot 65 = 1560$.

5.9 Med cykelnotation får vi $\alpha = (134)(68)(2579)$ och $\beta = (19)(3254)(678)$. Vi parar nu ihop cykler av lika storlek och skriver dem ovan varandra. Sedan låter vi σ avbilda rakt nedåt. Exempelvis får vi, om vi skriver (134) i α ovanför (678) i β att $\sigma(1) = 6$, $\sigma(3) = 7$ och $\sigma(4) = 8$. Sammantaget fås $\sigma = 6\ 3\ 7\ 8\ 2\ 1\ 5\ 9\ 4\ = (16)(2375)(489)$.

5.10 Vi ska visa att $(\sigma\alpha)\alpha(\sigma\alpha)^{-1} = \beta$. Men $(\sigma\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\sigma^{-1}$, så vi får

$$(\sigma\alpha)\alpha(\sigma\alpha)^{-1} = \sigma\alpha\alpha\alpha^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta.$$

För $\beta\sigma$ görs motsvarande beräkning.

5.11 Det räcker att visa att vi för alla $\pi \in S_n$ kan omavandla π till identitetspermutationen. Börja med att med granntranspositioner förflytta talet n längst bak i permutationen. Sedan flyttar vi $n-1$ näst längst bak och så vidare. Till slut står varje tal där det ska stå och vi har fått identitetspermutationen.

5.12 Varje par av element kan antingen stå i rätt ordning, d.v.s. det mindre till vänster om det större, eller fel ordning, d.v.s. det mindre till höger om det större. Om de står i fel ordning måste vi någon gång utföra den granntransposition som gör att dessa två element byter plats. Antalet granntranspositioner som behövs är alltså minst antalet par av element i fel ordning.

Om vi inte har identitetspermutationen så finns alltid två element som är grannar och i fel ordning. Om vi låter dem byta plats har antalet par av element i fel ordning minskat med 1. Eftersom vi kan fortsätta likadant tills vi får identitetspermutationen behövs inte fler granntranspositioner än antalet par i fel ordning.

Antalet par av element är alltså precis det minsta antalet granntranspositioner som krävs. Ett enkelt sätt att räkna ut detta tal är att för varje element bestämma antalet element som står till vänster och är större. Summan av detta blir det vi söker. För $\pi = 3\ 5\ 2\ 6\ 4\ 1$ får vi $5+2+0+2+0+0=9$.

5.13 Vi betraktar ett element i taget och låter π verka på det. Element 1 går i högraste transpositionen till 4, i näst transposition till 7, i den femte till 3 och slutligen, längst till vänster, går denna trea tillbaks till 1. Nästa element, 2, avbildas i tredje transpositionen på 5, där den stannar. Upprepas denna tankegång för samtliga element fås permutationen $\pi = (1)(256743)$.

6 Modulär aritmetik

8 Grafer

10 Bipartita grafer och matchningar

10.1 Betrakta en Platonsk kropp som består av liksidiga n-hörningar, som sitter ihop k stycken vid varje hörn. Vi kan då skapa två intressanta bipartita grafer. Den ena består av kanter och n-hörningar, med en kant mellan en kant och en n-hörning om kanten begränsar n-hörningen. Varje kant har då valens 2 och varje n-hörning har valens n. På samma sätt har vi en bipartit graf med hörn och kanter, där ett hörn och en kant är relaterade om kanten går från detta hörn till något annat. Hörnen får då valens k och kanterna valens 2. Det ger, från sats 10.1.1 i Biggs, ekvationerna $2e = nf$ och $2e = kv$, vilket tillsammans med $v-e+f=2$ ger $\frac{1}{k}+\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=\frac{1}{2}$. Men $n \geq 3$ och $k \geq 3$, så det finns bara 5 möjligheter att uppfylla detta, nämligen $n=k=3$ (tetraeder), $n=3, k=4$ (oktaeder), $n=3, k=5$ (dodekaeder), $n=4, k=3$ (kub) och $n=5, k=3$ (ikosaeder).

10.2 Skapa grafen $G = (X \cup Y, E)$ där vi för varje element $(x,y) \in S$ drar en kant mellan x och y. Då blir $|S| = |E|$, $\delta(x) = r_x(S)$ och $\delta(y) = c_y(S)$.

10.3 Vi ska dela in kanterna, vilka svarar mot matcher som ska spelas, i disjunkta mängder, vilka svarar mot de olika omgångarna. Detta görs genom kantfärgning. Grafen är inte bipartit, eftersom den innehåller trecykler, så vi kan inte använda sats 10.2.

Eftersom högsta valensen är 4 krävs minst 4 färger. Det är inte särskilt svårt att visa att man klarar sig med enbart 4 färger (se tabellen nedan).

Kant	Färg
NE	α
NR	β
NH	γ
NT	δ
ET	β
ER	δ
RT	γ
RH	α
JT	α
HJ	β

13 Grupper

15 Ringar och kroppar

17 Felrättande koder

18 RSA

19 Boolesk algebra

Kapitel 4

Facit

1 Heltal

2 Mängder och funktioner

2.2 **a** En funktion.

b Ingen funktion.

c Ingen funktion.

2.3 **a** Bijektiv. Inversen är $f^{-1}(y) = y - 6$.

b Injektiv.

c Ingetdera.

d Surjektiv.

e Bijektiv. Funktionen är sin egen invers.

2.4 Injektiv.

2.5 $n = 6$

2.6 Nej.

3 Kombinatorikens grunder

3.2 168 miljoner

3.3 8

3.4 24 389 000

3.5 3 037 500 000

3.6 $2n!^2$.

3.7 Rektor kan klä sig på $\frac{6!}{3 \cdot 2} = \frac{720}{12} = 120$ olika sätt.

4 Delmängder

4.1 8 966 909 952.

4.2 7:1 respektive

$$\sum_{k=a}^{c} \binom{c}{k} : \sum_{k=0}^{a-1} \binom{c}{k}.$$

5 Partitioner och distributioner

5.6

$$\binom{10}{1,3,1,4,1} = 25200.$$

5.7

$$\binom{3n}{n,n,n}$$

respektive

$$\binom{n_1+n_2+\ldots+n_d}{n_1,n_2,\ldots,n_d}.$$

5.8 $4!S(6,4) = 24 \cdot 65 = 1560$

5.9 $\sigma = 6\ 3\ 7\ 8\ 2\ 1\ 5\ 9\ 4\ = (16)(2375)(489)$

5.12 För $\pi = 3\ 5\ 2\ 6\ 4\ 1$ krävs 9 granntranspositioner.

5.13 $\pi = (1)(256743)$

6 Modulär aritmetik

8 Grafer

10 Bipartita grafer och matchningar

10.3 Det krävs 4 omgångar.

13 Grupper

15 Ringar och kroppar

17 Felrättande koder

18 RSA

19 Boolesk algebra