Läsanvisning till Discrete matematics av Norman Biggs - 5B1118 Diskret matematik

Mats Boij

26 november 2001

10 Bipartita grafer och matchningsproblem

Det tionde kapitlet behandlar bipartita grafer, och speciellt kantfärgningar och matchningar i sådana. Bipartita grafer definierades tidigare som de grafer som kan hörnfärgas med två färger. I det här kapitlet kommer de bipartita graferna med en given hörnfärgning, eller snarare en given färgpartition av hörnmängden, nämligen $V = X \cap Y$.

	lättare	svårare
10.1	1,2	
10.2	1	3
10.3	1	3
10.4	1	
10.7	16	17

10.1 Relationer och bipartita grafer

Här definieras vad som menas med en *relation* mellan två mängder X och Y. I abstrakt mening är det en delmängd av produktmängden $X \times Y$, och funktionsbgreppet är ett specialfall av begreppet relation, nämligen när det för varje element x i X finns precis ett element y i Y som står i relation med x.

Det blir naturligt att en bipartit graf kan ses som en relation mellan X och Y, samtidigt som en sådan relation kan ses som en bipartit graf.

Sats 10.1 säger att summan av valenserna av hörnen i var och en av delarna måste vara lika med antalet kanter.

Översättningar

bipartite *bipartit*
relation *relation*
complete bipartite graph *fullständig bipartit graf, komplett bipartit graf*

10.2 Kantfärgning av grafer

Istället för att färga hörnen i en graf så att närstående hörn får olika färg kan man färga kanterna så att kanter som utgår från samma hörn får olika färg. Det går att se detta problem som ett hörnfärgningsproblem i en graf som associeras till den givna grafen genom att låta kanterna vara hörn och dra kant mellan de som har ett gemensamt hörn. Det visar sig dock att kantfärgning skiljer sig ganska mycket från hörnfärgning. Det är nämligen mycket lättare att bestämma hur många färger som behövs för att kantfärga en graf än att bestämma hur många färger det krävs för att hörnfärga den.

En *kantfärgning* kan ses som en funktion från kantmängden till de positiva heltalen sådan att kanter som har ett gemensamt hörn ger olika värden.

Sats 10.2 visar att det åtminstone i fallet med kantfärgning av bipartita grafer räcker med så många färger som man skulle kunna hoppas på, dvs lika många som den högsta valensen av något hörn. Det är klart att det inte går med färre, men det är inte alls lika uppenbart att det verkligen går.

Beviset inför en viktig algoritm, eller metod, för att hitta en kantfärgning av en bipartit graf med detta antal färger. Metoden går ut på att försöka färga så många kanter det går till att börja med, och sedan när det uppstår problem, får man modifiera den färgning som gjorts. Poängen är att det alltid går att modifiera den uppkomna färgningen så att ytterligare en kant kan färgas.

Metoden att modifiera färgningen bygger på något som kallas *alternerande stigar* som är stigar som är färgade med två färger. Om den kant som ska färgas är xy ges den ena färgen av att det är en färg som inte redan använts för kanter från x och den andra ges av en färg som inte använts för kanter från y. Sedan bildar man en alternerande stig genom att gå vidare från y över den kant som färgats med den första färgen och sedan vidare med den andra färgen tills det tar slut. Då kan man gå tillbaka och byta de två färgerna mot varandra längs stigen och den nya kanten kan färgas som önskat.

Översättningar

edge-colouring *kantfärgning*
alternating path *alternerande stig*

10.3 Tillämpning av kantfärgning på latinska kvadrater

Latinska kvadrater har vi stött på tidigare som grupptabeller. Här kommer en algoritm som bygger på Sats 10.2 om kantfärgning av bipartita grafer och som säger att en delvis utfylld latinsk kvadrat alltid kan utvidgas till en fullständig latinsk kvadrat om det är ett helt antal rader som är ifyllda. En sådan delvis utfylld latinsk kvadrat kallas en *latinsk rektangel*.

Beviset för sats 10.3.1 ger tillsammans med beviset för sats 10.2 en algoritm för att utföra en sådan utvidgning. Man skapar en kantfärgad bipartit graf från den latinska rektangeln genom att associera hörnen på ena sidan med kolonnerna och hörnen på andra sidan med symbolerna. Raderna får sedan ge färger på kanterna och på grund av den latinska egenskapen ger det en tillåten kantfärgning. Det man sedan vill åstadkomma är att komplettera den bipartita grafen med ytterligare kanter så att det bildas en komplett bipartit graf. Den delgraf som då läggs till kan kantfärgas med lika många färger som den högsta valensen och vi får en kantfärgning av hela den kompletta bipartita grafen. Denna i sin tur motsvarar en latinsk kvadrat som är en utvidgning av den givna rektangeln. Sats 10.3.2 ger en förfining av sats 10.3.1 där vi har en rektangel som inte består av ett helt antal rader. Det blir då ett villkor på antalet gånger symbolerna måste förekomma i rektangeln för att det skall gå att utvidga den.

Översättningar

latin square *latinsk kvadrat*
latin rectangle *latinsk rektangel*

10.4 Matchningar

En *matchning* i en graf är ett sätt att para ihop hörn som har kant mellan sig med varandra. Varje hörn får paras ihop med högst ett annat hörn. Mer abstrakt är det en delmängd av kantmängden så att inga kanter i den har nåågot gemensamt hörn.

En *maximal matchning* är en matchning med maximalt antal kanter. En *fullständig*, eller *komplett*, matchning i en bipartit graf är en matchning där alla hörn på ena sidan är matchade med något hörn på den andra sidan.

Sats 10.4 säger att det finns ett nödvändigt och tillräckligt villkor för existensen av en fullständig matchning i en bipartit graf. Detta villkor kallas för *Halls kriterium* och säger att det för varje delmängd av den mindre hörn mängden skall finnas minst lika många element på andra sidan som har kant till något av hörnen i delmängden. Detta är förstås ett nödvändigt krav och det svåra är att bevisa att det faktiskt är tillräckligt.

Beviset använder en metod som mycket påminner om metoden som anvädes i sats 10.2 för kantfärngning av bipartita grafer. Även här är det frågan om alternerande stigar. Vi vill lägga till en kant till en matchning för att få en matchning som har fler kanter. Om det inte går på en gång blir vi tvungna att modifiera den matchning vi redan hade. Det gör vi genom att bilda en *alternerande stig*, denna gång med kanter som alternerande tillhör matchningen, respektive inte tillhör matchningen.

Det går också att bevisa Sats 10.4 med hjälp av induktion över antalet hörn, men då får man inte på samma sätt en algoritm för att hitta en fullständig matchning.

Översättningar

matching *matchning*
maximum matching *maximal matchning*
complete matching *fullständig matchning, komplett matchning*
Hall’s condition *Halls kriterium*