Läsanvisning till Discrete matematics av Norman Biggs - 5B1118 Diskret matematik

Mats Boij

28 oktober 2001

2 Funktioner och räkning

Det andra kapitlet handlar om att räkna och för att kunna svara på några vanliga frågor inom *kombinatorik* kan det vara bra att formulera frågorna i termer av funktioner.

Rekommenderade uppgifter

	lättare	svårare
2.1	1	
2.2	1	
2.4	1	3
2.5		3
2.6	1	7,11

2.1 Funktioner

Vi får en definition av vad en funktion från en mängd till en annan är som inte är helt precis, men som ändå fungerar bra i de flesta fall.

För varje element x i mängden X finns ett element $f(x)$ i mängden Y.

Det är viktigt att komma ihåg notationen $f : X \longrightarrow Y$. I den här kursen är det också viktigt att inse att en funktion inte behöver vara given av en formel som det kanske har framstått i tidigare matematikkurser.

Ibland kan vi definiera *sammansättningen*, $g \circ f$, av två funktioner f och g. För att detta skall gå måste den första funktionen, g, gå från den mängd som funktionen f går till. Sammansättningen betecknas ibland $g \circ f$ och ibland gf. I det första fallet läser vi "g boll f".

Översättningar

function *funktion*
value *värde*
sequence *följd*
composite *sammansättning*

2.2 Surjektioner, injektioner och bijektioner

Tre viktiga egenskaper en funktion kan ha är att den är *surjektiv*, *injektiv* eller *bijektiv*.

Det kan vara svårt att hålla isär dessa begrepp i början eftersom de låter nästan lika. Ibland säger man *på*, istället för surjektiv, och *ett till ett*, eller *ett-ett*, istället för injektiv.

Sats 2.2.1 säger att alla dessa tre egenskaper fungerar bra under sammansättning, dvs sammansättningen av surjektiva funktioner är surjektiv, osv. Däremot kan man inte säga så mycket om sammansättningen av en injektiv funktion med en surjektiv.

Inversen av en funktion är ett mycket viktigt begrepp. Inte alla funktioner har en invers. Sats 2.2.2 säger att det är precis de bijektiva funktionerna som har en invers. En funktion som har en invers kallas ibland *inverterbar*, istället för bijektiv.

Om vi ser i uppgifterna ser vi att det står om två andra berepp, *vänsterinvers* och *högerinvers*. Dessa går att definiera för injektiva, respektive surjektiva, funktioner.

Översättningar

surjection *surjektion*
injection *injektion*
bijection *bijektion*
inclusion *inklusion*
identity *identitet*
inverse *invers*

2.3 Räkning - enumeration

Här inför Biggs notationen $\mathbf{N}_n$ för mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. En annan vanlig beteckning för denna mängd är $[n]$.

Det hela går ut på att bestämma vad som menas med "antalet element" i en mängd. Det kan verka uppenbart vad som borde menas med detta, men för att matematiskt säkerställa att inget kan gå fel måste vi göra en definition av detta utifrån vad vi hittills känner till och dessutom kontrollera att det inte uppstår någon osäkerhet som att man exempelvis skulle kunna komma fram till olika svar på frågan genom att räkna på olika sätt.

Till slut kommer vi fram till att antalet element i en mängd M är n om det finns en bijektion från M till $\mathbf{N}_n$. Vi säger då att M har *storlek* n, eller *kardinalitet* n. Biggs använder notationen $|M| = n$ för att ange detta, men det är också vanligt att man skriver $\#M = n$.

Översättningar

cardinality *kardinalitet, mäktighet*

2.4 Duvslagsprincipen

Duvslagsprincipen är en mycket enkel princip som rätt använd kan få ganska kraftfulla konsekvenser. Ibland kallas duvslagsprincipen också för *postfacksprincipen*. Idén är att det vid en fördelning av ett antal element i ett mindre antal fack måste komma minst två element i något fack.

Översättningar

pigeonhole principle *duvslagsprincipen, postfacksprincipen*
distribution *fördelning*

2.5 Ändlig eller oändlig?

I avsnitt 2.3 behandlades kardinaliteten av ändliga mängder, men redan de naturliga talen är ett exempel på en oändlig mängd. I själva verket är de naturliga talen den minsta oändliga mängden, i den mening att det finns en injektion från de naturliga talen in i varje oändlig mängd, som det framgår av Sats 2.5.

Exemplet som visar att det finns oändligt många primtal är Arkimedes berömda bevis för detta faktum. Det är ett mycket tydligt motsägelseargument.

Vi kan gå vidare och definiera kardinalitet även för oändliga mängder. Ett första steg är att se att det finns mängder som är “mer oändliga” än de naturliga talen. Dessa mängder kallas *överuppräkneliga* till skillnad från *uppräkneliga* mängder, som exempelvis $\mathbf{N}$ och $\mathbf{Z}$.

Översättningar

finite *ändlig*
infinite *oändlig*
countable *uppräknelig*
uncountable *överuppräknelig*