Läsanvisning till Discrete matematics av Norman Biggs - 5B1118 Diskret matematik

Mats Boij

19 oktober 2001

3 Principer för enumeration

Det tredje kapitlet handlar om olika principer som används för att räkna antalet element i olika mängder.

Rekommenderade uppgifter

kapitel	lättare	svårare
3.1	1	2,4
3.2	1,5	
3.3	1	3
3.4	1	
3.5	1	4
3.6	1,2	5
3.7	9	17,18

3.1 Att räkna par

Den första principen, *additionsprincipen*, är det kanske uppenbara att antalet element i en union är summan av antalet element i de ingående mängderna om det inte finns några gemensamma element. Vi skriver det som

$$|A \cup B| = |A| + |B| \text{ om } A \cap B = \emptyset.$$

Lite senare kommer vi att se en lite mer raffinerad variant $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ — *sållprincipen*.

Här formuleras något som kallas den *generaliserade duvslagsprincipen*, som säger att om fler än nr element fördelas i n fack kommer det att finnas minst $r + 1$ element i något fack.

Exemplet är ett klassiskt exempel från Ramseyteori; *bland sex personer finns antingen tre personer som alla känner varandra eller tre personer där ingen känner någon av de andra.*

Översättningar

disjoint *disjunkt, utan skärning*
mutual *inbördes*

3.2 Att räkna par

Metoden *att räkna par* kan ses som att i en rektangulär tabell med kryss summera antalet kryss antingen först rad för rad, eller först kolonn för kolonn. Resultatet måste i båda fall bli detsamma, och denna observation kan användas förvånansvärt ofta.

Översättningar

product set *produktmängd*
mutual *inbördes*

3.3 Eulers funktion

Eulers funktion, eller *Eulers ϕ-funktion*, introduceras här. Det är en funktion som kommer till användning senare när det handlar om *moduloräkning*. Här används den bara för att ge ett bra exempel på hur principen *att räkna par* kan användas. Sats 3.3 är intressant men kommer inte att komma till användning i den här kursen.

3.4 Funktioner, ord och urval

Det här handlar om att lägga m bollar i n lådor. Vi har fyra olika problem, som alla är ekvivalenta, dvs alla har samma lösning.

1. Antalet sätt att lägga m bollar i n lådor.
2. Antalet funktioner från $[m]$ till $[n]$.
3. Antalet ord längd m med ett alfabet med n bokstäver.
4. Antalet ordnade urval med återläggning av m element från en mängd med n element.

Sats 3.4 säger att svaret på samtliga dessa frågor är n^m.

Översättningar

m**-tuple** m*-tupel*
word *ord*
letter *bokstav*
alphabet *alfabet*
ordered selection with repetition *ordnat urval med återläggning*

3.5 Injektioner som ordnade urval utan återläggning

I stället för att ha urval med återläggning kan vi ha urval utan återäggning. Vi får då följande ekvivalenta problem:

1. Antalet sätt att lägga m bollar i n lådor så att det kommer högst boll en i varje låda.
2. Antalet injektiva funktioner från $[m]$ till $[n]$.
3. Antalet ord av längd m med ett alfabet av längd n utan upprepade bokstäver.
4. Antalet ordnade urval utan återläggning av m element ur en mängd med n element.

Sats 3.5 säger att svaret på dessa frågor är $n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

I uppgift 3.5.4 införs notationen $(n)_m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$. Det kan noteras att en vanligare notation är $[n]_m$.

Översättningar

ordered selection without repetition *ordnat urval utan återläggning*

3.6 Permutationer

Begreppet *permutation* är centralt inom kombinatorik och förkommer i nästan alla delar av matematiken. Många tänker sig en permutation som en omordning av en viss ordnad mängd. Här ges en mer matematisk definition som kommer göra det möjligt att räkna med permutationer. En permutation definieras som en bijektiv funktion och det blir därmed möjligt att sammansätta permutationer, eller multiplicera permutationer, som det också kan kallas.

Det är viktigt att kunna omvandla permutationer mellan de olika notationerna, enradnotation, tvåradsnotation och cykelnotation. Biggs använder egentligen bara tvåradsnotation och cykelnotation och har dessutom vertikala pilar i tvåradsnotationen.

enradnotation	**tvåradsnotation**	**cykelnotation**
235614	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$(1235)(46)$

Sats 3.6 visar att sammansättningen av permutationer i S_n uppfyller några naturliga räknelagar. Dessa räknelagar kommer senare visa sig vara axiomen för en *grupp*.

Det är värt att notera att en naturlig räknelag som inte är uppfylld för permutationer är *kommutativa lagen*. Det är i allmänhet inte sant att $\sigma\tau = \tau\sigma$ om σ och τ är permutationer.

Översättningar

rearrangement *omordning*
cycle notation *cykelnotation*