Läsanvisning till Discrete matematics av Norman Biggs - 5B1118 Diskret matematik

Mats Boij

3 november 2001

4 Delmängder och designer

Av det fjärde kapitlet ingår endast de fem första avsnitten i kursen.

Rekommenderade uppgifter

kapitel	lättare	svårare
4.1	5	
4.2	2	
4.3	2	3
4.4	1,2	
4.8	2	

4.1 Binomialtal

Binomialtal definieras här som antalet sätt att välja ut en delmängd med r element ur en mängd med n element. Eftersom elementen i en mängd inte är ordnade rör det sig om ett *oordnat urval* och eftersom inte samma element kan förekomma flera gånger i en delmängd är det ett urval *utan återläggning*.

Sats 4.1.1 ger en viktig rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

för binomialtalen och det är på denna rekursionsformel som *Pascals triangel* bygger.

Sats 4.1.2 ger en explicit formel för att räkna ut binomialtalen. Beviset använder induktion tillsammans med rekursionsformeln. Det går förstås utmärkt att bevisa formeln direkt genom att se på ordnat val utan återläggning tillsammans med permutation av elementen efter urvalet.

Översättningar

n**-set** n*-mängd*
unordered selection without repetition *oordnat urval utan återläggning*
binomial number *binomialtal, binomialkoefficient*

4.2 Oordnade val med återläggning

Sats 4.2 talar om att det är samma sak att räkna oordnade val med återläggning av r element från en mängd med n element som att räkna oordndade val utan återläggning av r element från en mängd med $n + r - 1$ element. Genom att förstå idén med beviset för satsen behöver man aldrig lära sig formeln utantill. Det går då lätt att återskapa formeln varje gång man kan tänkas behöva den.

Tabell 4.2.1 visar de fyra olika varianterna av urval, ordnat eller oordnat, med eller utan återläggning. Det är förmodligen poänglöst att lära sig tabellen utantill. Däremot kan det vara bra att titta på den några gånger och försöka förstå varför den ser ut som den gör.

Översättningar

unordered selection with repetition *oordnat val med återläggning*

4.3 Binomialsatsen

Binomialsatsen är en generalisering av den välbekanta *kvadreringsregeln*, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, till högre exponenter. Att det heter *bi*nomialsatsen kommer sig av att det är en potens av en summa av *två* termer. Senare kommer vi fram till *multinomialsatsen* som talar om vad som händer om det är fler än två termer.

Exemplet visar hur man kan aväna binomialsatsen för att bevisa en identitet med binomialtal. Det kan också ses som ett första exempel på användning av *genererande funktioner*. För att hålla reda på binomialtalen kan vi använda den genererande funktionen $(1 + x)^n$. I det här fallet är det ett polynom, men mer generellt kan genererande funktioner vara oändliga formella serier, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$.

4.4 Sållprincipen

Sållprincipen, eller *inklusions-/exklusionsprincipen*, talar om hur man kan beräkna antalet element i en union av mängder om man känner till antalet element i snittet av varje deluppsättning av mängderna. För att räkna ut detta behövs kännedom om antalet element i $2^n - 1$ olika mängder, om det rör sig om n stycken mängder. Om man ser det så verkar det inte vara någon större vinst, men i många fall kan det vara betydligt enklare att beräkna antalet element i ett snitt än i en union, och det är där nyttan kommer in.

Det andra exemplet visar på ett känt problem; *På hur många sätt kan man lägga n brev i n kuvert så att samtliga hamnar fel?* En konsekvens av att antalet sätt att göra det ges av

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i n!/i!$ är att sannolikheten att göra det om breven läggs i slumpmässigt kommer närma sig e^{-1} när n går mot oändligheten.

Översättningar

Sieve principle *sållprincipen*
derangement *oordning*
principle of inclusion and exclusion *inklusions-/exklusionsprincipen*

4.5 Några aritmetiska tillämpningar

Endast den första delen av detta avsnitt är intressant för kursen. Det är en tillämpning av sållprincipen för att beräkna Eulers funktion. Sats 4.5.1 ger en explicit formel för $\phi(n)$ givet en primtalsfaktorisering av n.

Översättningar

lattice *lattice, gitter*