Läsanvisning till Discrete matematics av Norman Biggs - 5B1118 Diskret matematik

Mats Boij

11 november 2001

5 Partitioner, klassifikation och fördelning

Det femte kapitlet behandlar partitioner av mängder och heltal, ekvivalensrelationer, fördelningar och multinomialtal, klassifikation av permutationer och begreppen udda och jämna permutationer.

Rekommenderade uppgifter

	lättare	svårare
5.1	1	2
5.2	1	
5.3	1,3	
5.4	1	2
5.5	2	3
5.6	1,4	
5.7	1,4,5,6	

5.1 Partitioner av en mängd

En *partition* av en mängd är en uppdelning av mängden i disjunkta delmängder, *delar*. En sak som är viktig att poängtera att uppdelningen inte är ordnad, trots att det kan se ut så i definitionen. Om $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ är $X_1 = \{1, 3, 5\}$, $X_2 = \{2, 4\}$ samma partition som $X_1 = \{2, 4\}$, $X_2 = \{1, 3, 5\}$. Det är också viktigt att notera att delarna i en partition är *icke-tomma* delmängder.

Stirlingtalen $S_{n,k}$ som ger antalet partioner av en mängd med n element i k delar. Observera att Biggs använder notationen $S(n, k)$ istället för $S_{n,k}$.

Sats 5.1 ger en rekursion för Stirlingtalen som påminner mycket om rekursionen för binomialtalen.

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

Denna rekursion gör att vi kan ställa upp Stirlingtalen i en tabell liknande Pascals triangel för binomialtalen.

Översättningar

family *familj*
partition *partition,uppdelning*
index set *indexmängd*
part *del*
Stirling number *Stirlingtal*

5.2 Klassifikation och ekvivalensrelationer

Ekvivalensrelationer har mycket gemensamt med partitioner. För varje partiotion kan vi definiera en ekvivalensrelation och tvärtom. Vi kan tänka oss att en ekvivalensrelation är ett sätt att i en mängd klumpa ihop element som på något sätt hör ihop. Ett exempel är när vi klassificerar djurarter i olika grupper, som exempelvis kräldjur, däggdjur, och så vidare. Ur vissa aspekter är djur som tillhör samma grupp att betrakta som lika, men det betyder inte att de är lika.

De tre egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet* definierar begreppet ekvivalensrelation. Den första och den sista såg vi tidigare när det var tal om heltalens ordning, men då hade vi *anti-symmetri* istället för symmetri.

Sats 5.2 säger just att det är samma sak att ge en ekvivalensrelation på en mängd som att ge en partiton av samma mängd. Delarna i den partition man får av en ekvivalensrelation kallas *ekvivalensklasser*.

Översättningar

equivalence relation *ekvivalensrelation*
classification *klassifikation*
reflexive *reflexiv*
symmetric *symmetrisk*
transitive *transitiv*
equivalence class *ekvivalensklass*

5.3 Fördelningar och multinomialtal

Istället för att se på en oordnad partition av en mängd kan vi hålla reda på ordningen mellan delarna. Vi får då något som kallas en *fördelning*. Det i stort sett samma sak som att ge surjektiv funktion till mängden $\{1, 2, \dots, k\}$ om partitionen består av k delar.

Sats 5.3.1 säger att antalet surjektioner från $\{1, 2, \dots, n\}$ till $\{1, 2, \dots, k\}$ ges av $k!S_{n,k}$. Detta beror just på att det enda som skiljer en partition med k delar från en fördelning, eller surjektiv funktion, är just ordningen mellan delarna, och det finns $k!$ möjliga ordningar.

Multinomialtal räknar antalet sätt att lägga n numrerade bollar i k numrerade lådor så att det kommer n_i bollar i låda i. Förutsättningen är att $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ och vi skriver multinomialtalet som

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Speciellt ser vi att så $k = 2$ är detta samma sak som ett binomialtal

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}..$$

Observera att detta visar att binomialtalet kan uppkomma på ett annat sätt än tidigare som antalet sätt att lägga bollar i lådor. Denna gång handlar det om att lägga n bollar i två lådor så att det kommer k bollar i den första.

Sats 5.3.2 säger hur vi kan räkna ut multinomialtalen som kvoter av fakulteter.

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Exemplet med ordet ABRACADABRA visar hur multinomialtalen kan användas för att räkna antalet olika ord som kan bildas med givna bokstäver.

Sats 5.3.3 är *multinomialsatsen* som talar om varför det kallas *multinomial*tal. Det är en generalisering av binomialsatsen och den säger att multinomialtalen är de koefficienter som uppkommer när man utvecklar uttrycket $(a_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$.

Översättningar

distribution *fördelning, distribution*
multinomial number *multinomialtal*

5.4 Partitioner av positiva heltal

Partitioner av heltal är det som man får från en partition av en mängd om man bara kommer ihåg antalet element i delmängderna. Delarna i en partition av ett heltal är precis som i fallet med partitioner av mängder oordnade. Detta begrepp kommer till användning bland annat när vi skall klassificera permutationer i nästa avsnitt.

Standardnotationen för en partition $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ är $[1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \ldots k^{a_k}]$ där a_i är antalet delar av storlek i.

5.5 Klassifikation av permutationer

Huvudresultatet, Sats 5.5, i avsnittet är att två permutationer är *konjugerade* om och endast om de är av samma *typ*. Att två permutationer, π och σ, är konjugerade betyder att det finns en permutation τ sådan att $\tau\pi\tau^{-1} = \sigma$. Det är förstås svårt att bilda sig en uppfattning om vad detta egentligen betyder bara av att titta på uttrycken. Meningen är att π och σ egentligen är samma permutation, men att någon, i det här fallet τ, har permuterat elementen i $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Typen av en permutation ges av den permutation av heltalet n som man får när man ser på cyklernas olika längd. Permutationen $(12)(34)(567)$ har alltså typ $[2^2 3]$, eftersom det finns två cykler av längs 2 och en av längd 3.

Översättningar

type *typ*
conjugate *konjugerade*

5.6 Udda och jämna permutationer

Här definieras begreppen *udda* och *jämna* permutationer. Det är ganska krångligt att få till definitionen så att man är säker på att det verkligen fungerar, dvs att en permutation inte kan vara både udda och jämn samtidigt.

Det vanligaste sättet är att som Biggs gör säga att en permutation är udda om den kan skrivas som sammansättningen av ett udda antal tvåcykler - *transpositioner*. Problemet är förstås att det inte alls är uppenbart att den då inte kan skrivas som en sammansättning av ett jämnt antal transpositioner.

Biggs använder uppdelningen av permutationerna i cykler för att visa att det alltid måste vara ett udda antal transpositioner om det är ett udda antal transpotitioner i något fall.

Ett annat sätt att definiera udda och jämna permutationer är genom antalet inversioner i permutationen, dvs antalet par (i, j) så att $i < j$ och $\pi(i) > \pi(j)$. Man kan då visa att en produkt av ett udda antal transpositioner har ett udda antal inversioner.

Exemplet visar att vi i ett femtonspel kan avgöra ifall en viss ställning är omöjlig att uppnå genom att betrakta udda och jämna permutationer.

Översättningar

even *jämn*
odd *udda*
transposition *transposition*