Läsanvisning till Discrete matematics av Norman Biggs - 5B1118 Diskret matematik

Mats Boij

26 november 2001

8 Grafer

Det åttonde kapitlet behandlar grafer, speciellt enkla grafer, deras representation, isomorfier av grafer och hörnfärgning av grafer. En graf är till för att hålla reda på något slags relation på en mängd. Elementen i mängden kallas *hörn*, eller *noder*, och relationerna åskådliggörs med hjälp av *kanter*, eller *bågar*, mellan hörnen.

	lättare	svårare
8.1	1	4
8.2	1	2
8.3	1	5
8.4	1,3	
8.5	1	4
8.6	1	3
8.8	1,4,5	2

8.1 Grafer och deras representation

Den abstrakta definitionen av graf som ges i detta avsnitt är definitionen av en *enkel graf*. Kanterna saknar riktning och det kan gå högst en kant mellan ett givet par av hörn. Det kan inte heller finnas några *öglor*, dvs kanter som bara är kant till ett hörn.

Översättningar

vertex *hörn*
edge *kant*
pictorial representation *geometrisk representation, bildlig representation*
adjacent *näraliggande*
neibour *granne*
adjacency list *granntabell*
complete graph *komplett graf, fullständig graf*

8.2 Isomorfi av grafer

förutom att samma graf kan ha olika geometrisk representation kan vi råka ut för att olika grafer ändå på något sätt är lika. Precis som för grupper och ringar säger vi att två grafer är *isomorfa* om det går att ändra namnen på hörnen så att graferna blir identiska. Mer abstrakt betyder det att det finns en bijektiv funktion f från den hörnmängden i ena grafen G till hörnmängden i den andra grafen H så att det går en kant mellan x och y i G om och endast det går en kant mellan $f(x)$ och $f(y)$ i H.

För att visa att två grafer inte är isomorfa räcker det oftast att se att det finns en egenskap som den ena grafen har som inte den andra har, exempelvis antal hörn, antal kanter, antal hörn med givet antal kanter, osv. Det måste dock vara egenskaper som inte har med namngivningen av hörnen att göra.

Däremot behövs nästan alltid en explicit konstruktion av en isomorfi för att visa att två grafer är isomorfa.

Översättningar

isomorphism *isomorfi*

8.3 Valens

Ett sätt att avgöra om två grafer skulle kunna vara isomorfa är att se på antalet kanter som utgår från de olika hörnen. Antalet kanter som utgår från ett hörn kallas hörnets *valens*, och skrivs $\delta(x)$ om hörnet är x.

Sats 8.3 säger att summan av valenserna är två gånger antalet kanter. Detta leder också till slutsatsen att antalet hörn med udda valens måste vara jämnt.

Översättningar

valency *valens*
regular *regulär, reguljär*
r**-valent** r*-valent*
cycle graph *cyklisk graf*
complement *komplement*

8.4 Stigar och cykler

Vägar och *stigar* är sätt att gå runt i en graf genom att föjla kanter. Det kan definieras på lite olika sätt beroende på ifall man ser det som en följd av hörn eller en följd av kanter. I det här fallet definieras en *väg* som en följd av hörn där hörn som ligger direkt efter varandra har en kant mellan sig. I det grafiska representationen kan vi se det som ett sätt att fylla i kanter utan att lyfta pennan.

En *stig* blir sedan samma sak men med kravet att inte samma hörn får förekomma mer än en gång, och ifall första och sista hörnet är samma kallas det en *cykel*.

Vi säger att en graf är *sammanhängande* om det går en stig mellan varje par av hörn. Vi får en partition av grafens hörn i *komponenter* genom att ta de största möjliga sammanhängande delgraferna. Motsvarande ekvivalensrelation är att $x \cong y$ om det går en stig mellan x och y.

Exemplet går ut på att försöka hitta *Eulervägar* och *Hamiltoncykler* i en graf. Det första är en väg som passerar alla kanter precis en gång, och det andra är en cykel som passerar alla hörn precis en gång.

Översättningar

walk *väg, vandring*
path *stig*
connected *sammanhängande*
component *komponent*
cycle *cykel*
r**-cycle** r*-cykel*
Hamiltonian cycle *Hamiltoncykel, hamiltonsk cykel*
Eulerian walk *Eulerväg*

8.5 Träd

Träd förekommer ofta i datalogiska sammanhäng, speciellt vid sökning. Det är oftast då tal om *rotade träd*, dvs träd där ett visst hörn har valts till rot för trädet. Sedan kan resterande hörn läggas nedanför i olika generationer.

Här definieras ett träd som en sammanhängande graf utan cykler. Vilket hörn som helst kan sedan väljas som rot i trädet om man vill ha ett rotat träd.

Sats 8.5 säger att ett det går en unik väg mellan varje par av hörn i ett träd och att antalet kanter i ett träd är ett mindre än antalet hörn.

Dessutom säger den att vi när vi delar ett träd genom att ta bort en kant så blir resultatet två träd.

Bland uppgifterna definieras vad som menas med en *skog*. Det är en graf utan cykler, och därmed en disjunkt union av träd.

Översättningar

tree *träd*

8.6 Hörnfärgning av grafer

Hörnfärgning har schemaläggning som främsta tillämpning. Det går ut på att ge hörnen färger så att näraliggande hörn får olika färg.

Egentligen är det förstås inte så viktigt att det är färger och den abstrakta definitionen av hörnfärgning som ges i avsnittet säger att en hörnfärgning är en funktion f från hörnmängden till de positiva heltaln sådan att $f(x) \neq f(y)$ om det går en kant mellan x och y.

Det minsta antalet färger som behövs vid en sådan färgning kallas det *kromatiska talet* för grafen och skrivs $\chi(G)$.

Man kan också definiera det kromatiska polynomet för en graf G genom att $P_G(k)$ är antalet sätt att färga G med högst k färger, dvs antalet funktioner från hörnmängden till $\{1, 2, \ldots, k\}$ som uppfyller kravet för hörnfärgning. Det är inte uppenbart från denna definition att detta verkligen blir ett polynom i k, men det går att se genom att införa färgningspartitioner av grafer. En färgningspartition är en partition av hörnmängden så att hörn i samma del inte har kant mellan sig. Givet en färgpartition av grafen i m delar ser vi att vi får $k(k-1)\cdots(k-m+1) = (k)_m$ olika sätt att färga hörnen så att hörnen i samma del får samma färg. Detta är ett polynom och det kromatiska polynomet fås genom att summera över alla färgpartitioner av grafen.

Översättningar

vertex-colouring *hörnfärgning*
chromatic number *kromatiskt tal*