Institutionen för matematik, **KTH**
Mats Boij och Niklas Eriksen

Lösningsförslag till
Tentamen i 5B1118 Diskret matematik 5p
20 december, 2001

1. Låt $M = \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ och definiera en funktion $f : M \longrightarrow M$ genom att låta $f(x)$ vara resten vid division av $3x + 5$ med 100. Avgör om f är injektiv, surjektiv eller bijektiv. **(3)**

   Lösning: För att avgöra ifall funktionen är injektiv undersöker vi om olika argument kan ge samma funktionsvärde. Antag att $f(x) = f(y)$. Då ger $3x + 5$ och $3y + 5$ samma rest vid division med 100. Det betyder att skillnaden mellan dem måste vara delbar med 100 och vi får $(3x + 5) - (3y + 5) = 100k$ för något heltal k, men det innebär att $3(x - y) = 100k$. Eftersom $100 = 3 \cdot 33 + 1$ är 3 och 100 relativt prima, och vi får att $x - y$ måste vara delbart med 100. Eftersom $-99 \leq x - y \leq 99$ kan inte $x - y$ vara delbart med 100 utan att $x - y = 0$, dvs $x = y$. Vi har kommit fram till att $f(x) = f(y)$ medför att $x = y$, dvs f är injektiv.

   Eftersom det är en injektiv funktion från en ändlig mängd till sig själv är den också surjektiv, och därmed också bijektiv.

   Vi kan också se att den är surjektiv genom att se att vi kan lösa den diofantiska ekvationen $3x + 5 = 100k + y$ för alla värden på y eftersom 3 och 100 är relativt prima.

   Svar: Funktionen f är bijektiv, dvs både injektiv och surjektiv.

   Rättningsmall: Endast rätt svar ger 0 poäng. Det är viktigt att motivera att den är både injektiv och surjektiv på ett bra sätt. Endast en korrekt motivering för endera injektivitet eller surjektivitet ger högst 2 poäng. Rätt formulerade definitioner av injektivitet, surjektivitet och bijektivitet ger 1 poäng.

   En korrekt utförd lösning visar på förståelse av begreppen injektivitet, surjektivititet och bijektivitet. Dessutom visar det på förståelse av heltalsaritmetik och delbarhet.

2. När man spelar *Bridge* tilldelas varje spelare 13 kort. Antag att en spelare fått 5 hjärter, 3 ruter, 2 klöver och 3 spader. På hur mänga sätt kan dessa kort sorteras så att varje färg ligger samlad, dvs alla hjärter ligger i följd, etc? Hur många sätt finns det om en spelare har h hjärter, r ruter, k klöver och s spader? **(3)**

   Lösning: Vi börjar med att gruppera korten färgvis. Sedan sorterar vi korten inom varje färg. Detta svarar mot att ordna dem linjärt, det vill säga att permutera dem, och n kort kan permuteras på $n!$ olika sätt. Slutligen permuteras färgerna, vilket kan göras på 4! sätt om samtliga färger förekommer, annars $m!$ om m färger förekommer i handen.

Enligt multiplikationsprincipen blir svaret generellt

$$h!r!k!s!m!$$

och i vårt specialfall

$$5!3!2!3!4! = 120 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 10 = 449720.$$

Svar: Antalet bridgehänder blir 449720 resp $h!r!k!s!4!$.

Rättningsmall: Viktigt är att kunna formulera vad man gör. Problemet bryts ner i mindre delar, som lätt kan beräknas. Att endast sortera färgerna ger högst 1 poäng. Att endast sortera inom färgerna ger likaledes högst en poäng. Att antalet sätt att fördela 5 hjärterkort ges av 5! ska motiveras, exempelvis med att detta är en permutation. Generaliseringen svarar mot en poäng, första delen mot två.

De som använt multinomialtal har i allmänhet fått 0 poäng, eftersom det räknar antalet sätt att blanda korten om kort av samma färg betraktas som lika.

3. Sex bollar läggs slumpmässigt i fyra lådor. Är sannolikheten att ingen låda blir tom större eller mindre än 0,4? **(3)**

   Lösning: Sannolikheten fås genom att dela antalet gynnsamma utfall med totala antalet utfall, under förutsättning att alla utfall är lika sannolika.

   Totala antalet utfall ges i det här fallet av antalet sätt att lägga sex bollar i fyra lådor, vilket är 4^6.

   Antalet gynnsamma utfall ges av antalet sätt att lägga sex bollar i fyra lådor så att ingen blir tom. Det är samma sak som antalet surjektiva funktioner från en mängd med sex element till en mängd med fyra element och det ges av $4!S_{6,4}$, där $S_{6,4}$ är Stirlingtalet som räknar antalet partitioner av en mängd med sex element i fyra delar. Vi kan använda rekursionen för Stirlingtalen för att beräkna $S_{6,4}$.

$$S_{n,k} = S_{n-1,k} + kS_{n-1,k}.$$

   Vi kan ställa upp en tabell liknande Pascals triangel, eftersom vi vet att $S_{n,1} = S_{n,n} = 1$, för alla n. Vi får

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1
\end{array}$$

Vi får från denna tabell att $S_{6,4} = 65$ och antalet sätt att lägga bollarna i lådorna så att ingen blir tom blir $4! \cdot 65$.

Sannolikheten att ingen låda blir tom ges nu av

$$\frac{4! \cdot 65}{4^7} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 65}{2^{12}} = \frac{195}{512}.$$

Vi skall jämföra detta med $0,4 = 2/5$ och får att

$$\frac{195}{512} < \frac{2}{5}$$

eftersom $5 \cdot 195 = 975 < 512 \cdot 2 = 1024$.

Svar: Sannolikheten är $195/512$ som är mindre än $0,4$.

Rättningsmall: Att räkna med oordnade utfall ger högst 1 poäng, eftersom det inte kan förutsättas att dessa är lika sannolika. Rätt antal surjektioner ger 2 poäng.

För full poäng krävs att rätt sannolikhet tas fram och att denna jämförs med 0,4.

4. Bestäm polynom $\lambda(x)$ och $\mu(x)$ i $\mathbf{Z}_3[x]$ sådana att

$$\mu(x)(x^3 + x^2 + 1) + \lambda(x)(x^2 + 2x + 2) = 1.$$

(3)

Lösning: Vi använder Euklides algoritm för polynom. Koefficienterna räknas modulo 3. Det ger

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 1 &= x(x^2 + 2x + 2) + (x + 1) \\ x^2 + 2x + 2 &= (x + 1)(x + 1) + 1 \end{aligned}$$

Dessa beräkningar kan nu följas baklänges för att beräkna $\mu(x)$ och $\lambda(x)$. Vi får

$$\begin{aligned} 1 &= (x^2 + 2x + 2) - (x + 1)(x + 1) \\ &= (x^2 + 2x + 2) - (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1 - x(x^2 + 2x + 2)) \\ &= -(x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

En lösning är alltså $\mu(x) = -(x + 1)$ och $\lambda(x) = x^2 + x + 1$.

Svar: Polynomen $\mu(x) = -(x + 1)$ och $\lambda(x) = x^2 + x + 1$ är en lösning.

Rättningsmall: Denna uppgift testar förtrogenhet med Euklides algoritm. Om första beräkningen utförs och slutsats dras att lösning finns ges ett poäng. Nästa beräkning ger ytterligare ett poäng och ett välpresenterat svar den tredje poängen.

5. Bestäm det kromatiska talet för grafen G som ges av följande granntabell

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	1	5	4	1	1	4	2	2
6	9	6	8	7	2	5	5	7	3
7	10	10		8	3	6			
					7	9			

(3)

Lösning: Det kromatiska talet är det minsta antal färger som krävs för att hörnfärga grafen. I det här fallet kan vi hörnfärga grafen med tre färger, men inte med två. Att vi inte kan hörnfärga med två färger kan vi se genom att det finns en cykel av udda längd, exempelvis $4, 5, 8$. Att det verkligen går att färga med tre färger kan vi visa genom att ge en explicit hörnfärgning. Vi färgar $1, 8$ i en färg, $2, 3, 4, 7$ i en annan färg och $5, 6, 9, 10$ i en tredje färg. Vi kan kontrollera i tabellen att det inte går kanter inbördes mellan dessa hörn, exempelvis genom att permutera kolonnerna så att de hörn som har färgats med samma färg står tillsammans.

1	8	2	3	4	7	5	6	9	10
3	4	6	1	5	1	4	1	2	2
6	5	9	6	8	5	7	2	7	3
7		10	10		6	8	3		
					9		7		

Svar: Det kromatiska talet för G är tre.

Rättningsmall: Rätt definition av kromatiskt tal ger 1 poäng. För kantkromatiskt tal ges högst 2 poäng. Det är viktigt att motivera både att det det går med tre färger och att det inte går med färre än tre färger.

6. Vilka av följande mängder av permutationer är delgrupper till S_5? Är några av delgrupperna isomorfa med varandra? Permutationerna är skrivna på enradsnotation.

$$A = \{12345, 14253, 15432, 13524\}$$
$$B = \{12345, 53142, 31542, 21543\}$$
$$C = \{15342, 42315, 45312, 12345\}$$
$$D = \{45321, 54312, 12345, 21354\}$$

(4)

Lösning: Eftersom S_5 har ändlig ordning räcker det att undersöka om mängderna är slutna under operationen i S_5, det vill säga sammansättning av funktioner. Vi skriver permutationerna på cykelform:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \{id, (2453), (25)(34), (2354)\} \\
\mathrm{B} &= \{id, (1523), (1352), (12)(35)\} \\
\mathrm{C} &= \{(25), (14), (14)(25), id\} \\
\mathrm{D} &= \{(1425), (1524), id, (12)(45)\}
\end{aligned}$$

Vi ser att B inte är sluten, eftersom $(1523)(1352) = (253) \notin B$. Däremot är de övriga mängderna slutna: A och D därför att de genereras av (2453) respektive (1425) ($(2453)^2 = (25)(34)$, $(2453)^3 = (2354)$, $(2453)^4 = id$ och $(1425)^2 = (12)(45)$, $(1425)^3 = (1524)$, $(1425)^4 = id$) och C därför att (25) och (14) genererar C. Samtidigt ser vi att A och D är isomorfa med cykliska gruppen på 4 element C_4 och därmed med varandra. C är isomorf med $C_2 \times C_2$ eftersom alla element har ordning 2 i och med att permutationerna är uppbyggda av disjunkta transpositioner, och därmed inte med de övriga.

Svar: A, C och D är delgrupper till S_5. A och D är isomorfa.

Rättningsmall: Detta är en tvådelad fråga, och vardera delen ger maximalt två poäng. Villkoret för att en delmängd är en delgrupp ger en poäng och helt korrekta slutsatser därav nästa poäng.

I del två gäller det att motivera ordentligt. Poänggränserna är något flytande, men rätt svar helt utan motivering ger inga poäng.

7. Hur många nollor avslutar talet 2001! om det skrivs hexadecimalt? (Observera att 2001 är skrivet decimalt.) **(3)**

Lösning: Vi behöver få reda på den högsta potens av 16 som delar 2001!. För att göra det beräknar vi först den största potens av 2 som delar 2001!. Vi behöver få reda på hur många av talen $1, 2, \ldots, 2001$ som är delbara med tvåpotenserna $2, 4, 8, \ldots, 1024$. Det kan vi få genom att ta kvoten av 2001 vid division med dessa tvåpotenser, eftersom antalet tal bland $1, 2, \ldots, n$ som är delbara med m ges av kvoten av n vid division med m.

För att beräkna kvoterna kan vi successivt ta kvoten vid division med två. Vi får då kvoterna $k_1 = 1000$, $k_2 = 500$, $k_3 = 250$, $k_4 = 125$, $k_5 = 62$, $k_6 = 31$, $k_7 = 15$, $k_8 = 7$, $k_9 = 3$, $k_{10} = 1$, där k_i är kvoten vid division med 2^i.

När vi sedan ska räkna hur många faktorer två det blir i produkten ska vi räkna de som är delbara med två, men inte med fyra, en gång. De som är delbara med fyra, men inte med åtta, räknas två gånger, osv. Alltså ska de som är delbara med 2^n, men inte med 2^{n+1}, räknas n gånger.

På så sätt får vi antalet faktorer två som

$$\begin{aligned}
1 \cdot (k_1 - k_2) + 2 \cdot (k_2 - k_3) + \cdots + 9 \cdot (k_9 - k_{10}) + 10 \cdot k_{10} &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{10} \\
&= 1000 + 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1994
\end{aligned}$$

Vi har alltså att 2^{1994} är den största tvåpotens som delar 2001! och eftersom $1994 = 4 \cdot 498 + 2$ är 16^{498} den största potens av 16 som delar 2001!. Slutsatsen blir att 2001! kommer att avslutas med 498 nollor om det skrivs hexadecimalt.

Svar: 2001! avslutas med 498 nollor om det skrivs hexadecimalt.

Rättningsmall: Att bestämma antalet nollor i slutet på 2001 ger 0 poäng.

Att leta efter tal som är delbara med potenser av 16 ger högst 2 poäng.

Principfel vid räkningen av största tvåpotens som delar 2001! ger högst 2 poäng.

8. I nedanstående tabell anges antalet grafer med 6 hörn och k kanter. Man lägger märke till att följden är symmetrisk — exempelvis finns lika många grafer med 0 kanter som med 15 kanter. Förklara varför.

#kanter	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
#grafer	1	1	2	5	9	15	21	24	24	21	15	9	5	2	1	1

(4)

Lösning: Det maximala antalet kanter i en graf med v hörn ges av antalet sätt att bland de v hörnen välja de två, som en kant ska gå mellan. Detta är val utan repetition (vi tillåter inte öglor), så detta ges av binomialkoefficienten $\binom{v}{2}$. I vårt fall får vi $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

För varje graf med k kanter kan vi skapa en graf med $15 - k$ kanter genom att låta en kant gå mellan precis de hörn, som i ursprungsgrafen inte var förbundna med en kant. Denna graf kallas *komplementgrafen*. Denna avbildning från grafer med k hörn till grafer med $15 - k$ hörn är i själva verket en bijektion, eftersom vi får tillbaka ursprungsgrafen om vi avbildar två gånger. Av detta följer att antalet grafer med k kanter är lika med antalet grafer med $15 - k$ kanter, vilket var det som skulle förklaras.

Rättningsmall: Det är viktigt att man börjar med att förklara vilken roll 15 (maximala antalet kanter) spelar i talet och hur detta kan beräknas. Brister här ger avdrag på en poäng. Resonemanget med komplementgrafen behöver inte vara så formellt som i lösningen ovan, men det ska klart och tydligt framgå varför antalet grafer med k kanter är lika många som de med $15 - k$ kanter. De som i förbigående eller enbart som slutkläm nämnt komplementgrafen får därför inte full poäng.

9. Formulera vad som menas med en isomorfi av booleska algebror och ge en explicit isomorfi mellan algebran av delmängder till $\{1, 2, 3, 4\}$ och algebran av booleska funktioner i två variabler. **(3)**

Lösning: En isomorfi av booleska algebror A och B är en bijektiv funktion $\Phi : A \longrightarrow B$ som bevarar den booleska strukturen, dvs uppfyller

(i) $\Phi(a + a') = \Phi(a) + \Phi(a')$, för alla a och a' i A.

(ii) $\Phi(a \cdot a') = \Phi(a) \cdot \Phi(a')$, för alla a och a' i A.

(iii) $\Phi(\bar{a}) = \overline{\Phi(a)}$, för alla a i A.

Vi ska nu ge en explicit isomorfi i fallet då A är algebran av delmängder av $\{1, 2, 3, 4\}$ och B är algebran av booleska funktioner i två variabler. En boolesk funktion i två variabler är en funktion från $B_2 = B_1 \times B_1$ till B_1, där B_1 är den booleska algebran med två element $B_1 = \{0, 1\}$. Eftersom B_2 innehåller fyra element $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ kan vi till att börja med ge en bijektion i från $\{1, 2, 3, 4\}$ till B_2. Därmed kan vi till en delmängd $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ associera funktionen $\Phi(X) : B_2 \to B_1$ som är ett på $i(X)$ och noll utanför $i(X)$. Eftersom vi från funktionen $\Phi(X)$ kan avgöra vilka element som ligger i $i(X)$, och därmed i X, är funktionen injektiv. Eftersom dessutom båda algebrorna har lika många element, nämligen $2^4 = 16$, är det en bijektion. Samtliga operationer på B sker punktvis och därmed blir operationerna de samma om vi ser på funktionerna som funktioner från B_2 eller från $\{1, 2, 3, 4\}$. Vi skall nu verifiera de tre kraven.

(i) $\Phi(a + a') = \Phi(a) + \Phi(a')$, för alla a och a' i A. I vänsterledet är $+$ union av delmängder. Tag två delmängder X och Y i $\{1, 2, 3, 4\}$. Vi tar sedan $\Phi(X \cup Y)$ och ser att det är funktionen som är ett på unionen $i(X \cup Y) = i(X) \cup i(Y)$ och noll utanför. Om vi ser på högerledet $\Phi(X) + \Phi(Y)$ så är det ett precis om någon av $\Phi(X)$ eller $\Phi(Y)$ är ett, vilket det är precis för de element som ligger i $i(X)$ eller $i(Y)$, dvs i unionen $i(X) \cup i(Y)$. Alltså är $\Phi(X \cup Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$.

(ii) $\Phi(a \cdot a') = \Phi(a) \cdot \Phi(a')$, för alla a och a' i A. Tag på samma sätt två delmängder X och Y. Vi tar sedan $\Phi(X \cap Y)$ och ser att det är funktionen som är ett på snittet $i(X \cap Y) = i(X) \cap i(Y)$ och noll utanför. Om vi ser på högerledet $\Phi(X) \cdot \Phi(Y)$ så är det ett precis om både $\Phi(X)$ och $\Phi(Y)$ är ett, vilket det är precis för de element som ligger i både $i(X)$ och $i(Y)$, dvs i snittet $i(X) \cap i(Y)$. Alltså är $\Phi(X \cap Y) = \Phi(X) \cdot \Phi(Y)$.

(iii) $\Phi(\bar{a}) = \overline{\Phi(a)}$, för alla a i A. Vi tar en delmängd X i $\{1, 2, 3, 4\}$ och ser på $\Phi(X^c)$. Det är en funktion som är ett precis på mängden $i(X^c) = i(X)^c$, dvs utanför $i(X)$. Ser vi på högerledet $\overline{\Phi(X)}$ så är det ett precis om $\Phi(X)$ är noll, dvs utanför $i(X)$. Alltså är $\Phi(X^c) = \overline{\Phi(X)}$.

Rättningsmall: Endast ett någorlunda bra isomorfibegrepp ger högst 1 poäng. 1 poäng för rätt isomorfi och ytterligare 2 poäng för motivering att det verkligen är en isomorfi.

10. I föredraget om bioinformatik under kursens sista vecka angavs en formel för antalet inversioner som krävdes för att sortera en tecknad permutation π med n element. Avståndet var i stort sett $n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler i brytpunktsgrafen till π, inklusive de korta cyklerna av längd 1.

    Ett liknande samband gäller för vanliga permutationer. Låt $d(\pi)$ vara antalet transpositioner som krävs för att sortera $\pi \in S_n$. Alternativt kan vi säga att $d(\pi)$ är det minsta antal transpositioner som krävs för att skriva π. Visa att $d(\pi) = n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler som permutationen π har då den skrivs med cykelnotation. (Observera att med transpositioner avses här tvåcykler, det vill säga helt enligt definitionen i kursboken.) **(4)**

Lösning: Vi måste studera vad som händer när vi sätter samman en transposition med en permutation $\pi \in S_n$. Antag att transpositionen är $(x\ y)$. Om x och y ligger i samma cykel $(x\ x_1\ x_2 \dots x_k\ y\ y_1 \dots y_l)$ så får vi $(x\ x_1\ x_2 \dots x_k\ y\ y_1 \dots y_l)(x\ y) = (x\ y_1\ \dots y_l)(yx_1 \dots x_k)$, så antalet cykler har ökat med 1. Om vi antar att x och y ligger i olika cykler så får vi $(x\ x_1\ \dots x_k)(yy_1 \dots y_l)(x\ y) = (x\ y_1 \dots y_l\ y\ x_1 \dots x_k)$, så antalet cykler minskar med 1.

Målet är att med transpositioner öka antalet cykler från $c(\pi)$ till n, eftersom identiteten $(1)(2)\dots(n)$ har n cykler. Eftersom transpositioner är sina egna inverser kan vi då förlänga $\tau_1\tau_2 \dots \tau_k\pi = id$ med transpositionerna och få $\pi = \tau_k \dots \tau_1$. Om vi på motsvarande sätt har skrivit π som en produkt av transpositioner, så följer att dessa sorterar π.

Av analysen ovan står klart att vi, för att öka antalet cykler från $c(\pi)$ till n måste applicera minst $n - c(\pi)$ tranpositioner, eftersom varje transposition förmår öka antalet cykler maximalt ett steg. Å andra sidan, eftersom vi alltid kan finna två element i samma cykel om permutationen inte är identiteten, så kan vi alltid finns en transposition som ökar antalet cykler med ett. Därav följer att antalet transpositioner som krävs för att sortera en permutation $\pi \in S_n$ ges av $n - c(\pi)$.

Rättningsmall: Detta är en svårare uppgift och är tänkt att klaras av dem som aspirerar på betyg 5. Vi lägger därför litet högre vikt vid formaliteter här. Det ska av lösningen klart och tydligt framgå sambandet mellan sortering av π och omskrivning av π som en sammansättning av transpositioner. Det ska även framgå att antalet cykler ändras ett steg uppåt eller nedåt så en transposition appliceras, samt att det alltid finns en transposition som ökar antalet cykler, om $\pi \neq id$.