Institutionen för matematik, **KTH**
Mats Boij och Niklas Eriksen

Tentamen i 5B1118 Diskret matematik 5p
14 augusti, 2002

Skrivtid: 14.00-19.00
Inga hjälpmedel tillåtna.

För godkänt = betyg 3 fordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng. De som har godkänt från inlämningsuppgifterna får tillgodoräkna sig motsvarande uppgift med 3 poäng. Ange de uppgifter du får tillgodoräkna dig med ett G på övre delen av skrivningsomslaget. Det maximala antalet poäng är angivet inom parentes vid varje uppgift.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl!

1. Använd induktion för att visa att 8 delar $(2n+1)^2 - 1$ för alla $n \geq 0$. **(3)**

2. Finns det en uppsättning delmängder av $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sådana att alla har fyra element och att varje element i S förekommer i precis sex av delmängderna? **(3)**

3. Visa att 129 inte är ett primtal genom att utföra *Fermat-testet* med bas 2. **(3)**

4. Faktorisera polynomet $x^4 + 2x^3 + x + 1$ i irreducibla faktorer i $\mathbf{Z}_7[x]$. **(3)**

5. I England bedrivs sedan länge en speciall sorts klockringning, där n olika stämda kyrkklockor används. Man ringer dessa i sekvenser, där alla klockor ingår exakt en gång i varje sekvens (varje sekvens svarar mot en permutation av klockorna). Permutationerna för två sekvenser i följd får bara skilja sig åt med en granntransposition (två element bredvid varandra byter plats). En tillåten följd av sekvenser med tre klockor är exempelvis `ABC, ACB, CAB, CBA, BCA, BAC`. Klockringningen är slut när man hunnit med samtliga permutationer.

   Betrakta problemet att finna en sådan följd av sekvenser, för godtyckligt n. Modellera detta som ett grafproblem, med permutationerna som hörn. Vad svarar en giltig klockringning mot i grafteoretiska termer? Är det i allmänhet lätt att finna en lösning till sådana problem? **(3)**

6. Förklara hur en latinsk rektangel kan utvidgas till en latinsk kvadrat med hjälp av kantfärgning av bipartita grafer. Illustrera metoden genom att fylla ut rektangeln

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ E & A & D & C & B \end{array}$$

(4)

7. En linjär kod ges av matrisen

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hur många fel rättar den? Hur många kodord innehåller den? Om ordet 0110011 mottas, vilket kan vi då anta skickades? **(4)**

8. Om sex personers namn skrivs på lappar som slumpvis fördelas till de sex personerna, så att alla får var sin, är sannolikheten att ingen får sitt eget namn 53/144. Bevisa detta, exempelvis med hjälp av sållprincipen. **(4)**

9. Låt $M \subseteq \{\{a_1, a_2, \ldots\} | a_i \in \mathbf{N}\}$ vara mängden av följder $\{a_1, a_2, \ldots\}$ av naturliga tal sådana att endast ett ändligt antal element är nollskilda. Visa med hjälp av *Aritmetikens fundamentalsats* att mängden M har samma kardinalitet som de naturliga talen. **(4)**

10. Vi säger att en permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ innehåller mönstret $\tau = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_k$, om vi kan plocka ut element $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}$, där $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, så att de är ordnade storleksmässigt på samma sätt som τ. Exempel: permutationen 164523 innehåller mönstret 132 på flera ställen, såsom **164**523, **16**45**2**3 och **1**64**523**. Den innehåller däremot inte mönstret 213.

    Låt L_k vara längden hos den kortaste permutationen som innehåller **alla** mönster av längd k. Visa att $L_k \geq \frac{k^2}{e^2}$ för stora k genom att visa att kortare permutationer inte kan innehålla alla mönster av längd k, eftersom det inte finns tillräckligt med delsekvenser i dem. Du får använda att $k! \geq \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k}$. **(4)**