4. Några viktiga summations- och integrationsformler.

Först en repetition:

4.1 Geometriska serier

För godtyckliga komplexa tal a och k gäller

$$\underbrace{a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1}}_{n \text{ termer}} = s = \begin{cases} a\,\dfrac{1-k^n}{1-k}, & \text{om } k \neq 1, \\ a\,n, & \text{om } k = 1. \end{cases} \tag{G}$$

Bevis: Om $a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = s$,
så är $ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + ak^n = ks$,
varav efter subtraktion,

$$a(1-k^n) = (1-k)s \;\Leftrightarrow\; a\,\frac{1-k^n}{1-k}, \text{ (om } k \neq 1).$$

Om $k = 1$, så är s summan av n st tal a, d.v.s. $= na$. ♦

Övningar:

4.1 Summera

a. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} + \dfrac{8}{81} + \ldots + \dfrac{2^{99}}{3^{100}}$,

b. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} - \dfrac{8}{81} + \ldots - \dfrac{2^{99}}{3^{100}}$.

4.2 I sambandet $\dfrac{1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n}{1 - k + k^2 - k^3 + \ldots - k^n} = 2$ är n ett udda heltal ≥ 1. Bestäm k.

4.3 En bank ger ränta p% årligen med ränteutbetalning vid årets slut. Varje år under sammanlagt n år sätts a kr in på ett konto den 2 januari. Hur stort blir kapitalet efter det n:te årets slut om inga uttag görs?

4.4 Summera $x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} + y^n$, då n är ett heltal ≥ 2.

4.5 Verifiera att summan

$$e^{-Mt} + e^{-(M-1)t} + \ldots + e^{-t} + 1 + e^{t} + \ldots + e^{(M-1)t} + e^{Mt}$$

för $t \neq 0$ kan skrivas

$$\frac{e^{Pt/2} - e^{-Pt/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} = \frac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2},$$

där P är antalet termer i summan.

4.6 Summan (G) ovan är tydligen en polynom i variabeln k och måste därför vara kontinuerlig. Speciellt måste summans värde för $k = 1$ vara $= \lim\limits_{k \to 1} a\,\dfrac{1-k^n}{1-k}$,
Verifiera detta genom att direkt beräkna gränsvärdet t.ex. med hjälp av l'Hospitals regel.

4.7 Vilket värde har $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sinh Pt/2}{\sinh t/2}$?

De komplexa exponentialfunktionerna av typen $e^{j\omega}$, där ω är en reell variabel tilldrar sig ett speciellt intresse inom signalteorin. Ett exempel är $j\omega$-metoden beskriven i Olles kompendium, kap 8. Vi skall i de följande avsnitten titta närmare på vissa enkla summor och integraler av sådana funktioner. Det visar sig nämligen att det finns oväntade samband mellan sådana summor och δ-pulserna. Sambanden är hörnstenar inom den matematiska teori – fourieranalysen – som spelar en stor roll inom signalteorin.

4.2 Summation av harmoniska vågor ($e^{j\omega}$ -funktioner), pulståg

4.2.1 Först en kommentar till vissa variabelval:

Värdet av funktionen $e^{j\omega}$ är som vi vet ett komplext tal med belopp 1 och med argumentvinkeln ω, *mätt i radianer*. Om ω beror av tiden så kan man åskådliggöra funktionen som en rörlig pekare fäst i origo i planet. Att man oftast valt just radianmåttet som vinkelmått beror bl.a. på att deriveringsformlerna för den komplexa exponentialfunktionen, och därmed sinus- och cosinusfunktionerna, då blir speciellt enkla.

Exempelvis är som bekant $\frac{d}{d\omega}\sin\omega = \cos\omega$, om ω mäts i radianer, medan $\frac{d}{d\omega}\sin\omega° = \frac{\pi}{180}\cos\omega°$, om ω mäts i grader. Trots att radianmåttet verkar vara ”bäst” i matematiska sammanhang kan det i vissa fall ändå vara fördelaktigt att välja ett annat vinkelmått. Ett ”naturligt” sådant är att ta *ett varv* som enhet. Ett varv motsvarar då 2π radianer respektive 360°. Denna enhet används bl.a. i Hjalmarssons kompendium, vinkelvariabeln betecknas där med *f*. Sambandet mellan ω (radianer) och *f* (varv) är alltså

$$\omega = 2\pi f.$$

När det gäller harmoniska svängningar $e^{j\omega t}$ (ω konstant, *t* tidsvariabel) så brukar ω kallas *vinkelfrekvensen* medan *f* i $e^{j2\pi f t}$ anger antalet perioder/sek, d.v.s. den storhet som inom fysiken mäts i Herz.

Vi tittar nu närmare på summor av heltalspotenser av $e^{j\omega}$-funktioner där vi ersatt ”radianvariabel” ω med ”varvvariabeln” $2\pi\alpha$:

4.2.2 Summation av harmoniska funktioner

Summan

$$e^{-2\pi j M\alpha} + e^{-2\pi j(M-1)\alpha} + \ldots + e^{-2\pi j\alpha} + 1 + e^{2\pi j\alpha} + \ldots + e^{2\pi j(M-1)\alpha} + e^{2\pi j M\alpha} = \sum_{n=-M}^{M} e^{2\pi j n\alpha}.$$

är en geometrisk serie med kvot $e^{2\pi j\alpha}$, första term $e^{-2\pi j M\alpha}$ och med *P* stycken termer, där *P* är det *udda* talet $2M + 1$. För $e^{2\pi j\alpha} \neq 1$ får man därför summan

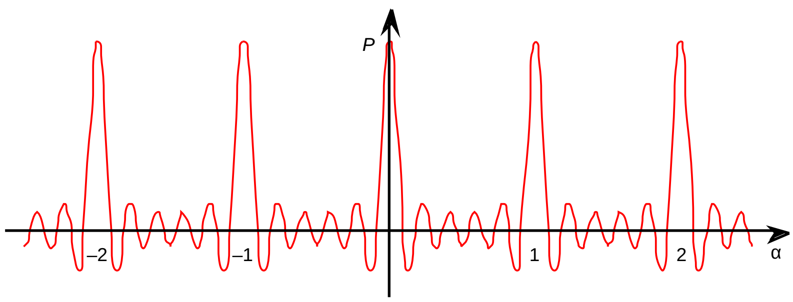
$$S_{1,P}(\alpha) = \sum_{n=-M}^{M} e^{2\pi j n\alpha} = e^{-2\pi j M\alpha}\,\frac{e^{2\pi j(2M+1)\alpha} - 1}{e^{2j\alpha} - 1} =$$

$$= e^{-\pi j(2M+1)\alpha}\,\frac{e^{2\pi j(2M+1)\alpha} - 1}{e^{\pi j\alpha} - e^{-\pi j\alpha}} = \frac{e^{\pi j(2M+1)\alpha} - e^{-\pi j(2M+1)\alpha}}{e^{\pi j\alpha} - e^{-\pi j\alpha}} = \frac{\sin \pi P\alpha}{\sin \pi\alpha}.$$

För $e^{2\pi j\alpha} = 1$, dvs α = heltal, är summan istället = *P*. Notera att termerna i summan alla är 1-periodiska i variabeln α, detsamma gäller då förstås också summan.

(Beteckningen $S_{1,P}(\alpha)$ härrör från Hjalmarssons kompendium (sid 70), där mera generellt den skalade varianten $T\,S_{1,P}(\mathrm{T}\,t)$ skrivs $S_{T,P}(t)$.)

Summan är tydligen alltid reell och som funktion av α har dess graf principutseendet:



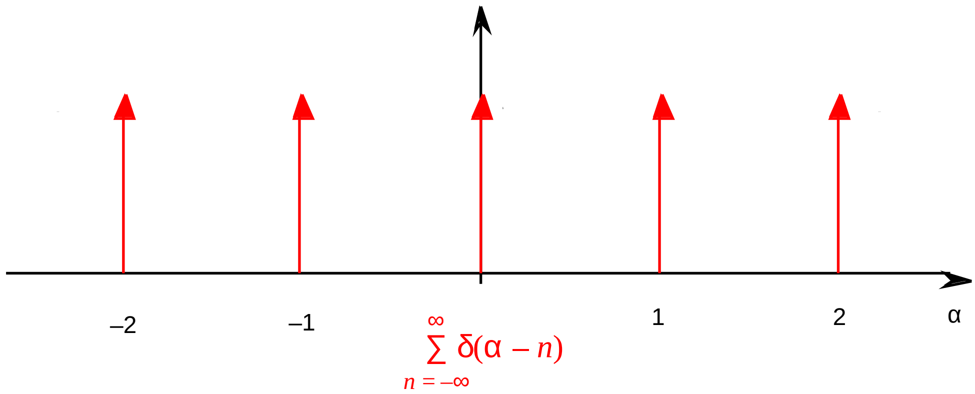
Funktionen är periodisk med periodlängd 1, och dess 0-ställen i intervallet $0 < \alpha < 1$ är $\alpha = 1/P, 2/P, \ldots, (P-1)/P$. [1]

1 I figuren är $P = 11$.

Man kan visa att

$$\int_a^b S_{1,P}(\alpha)\,d\alpha \to \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ om intervallet } a < t < b \text{ innehåller precis en heltalspunkt,} \\ 0, \text{ om intervallet } a < t < b \text{ inte innehåller någon heltalspunkt,} \end{array} \right\} \text{ då } P \to \infty.$$

Funktionen kommer alltså för stora P att approximativt motsvara enhetspulser vid ”tidpunkterna” α = heltal. Funktionen representerar ett så kallat *pulståg*.



Resultatet kan med hjälp av generaliserade funktioner uttryckas

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - n)} \tag{12}$$

Övning:

4.8 Utnyttja sambandet (6) för att verifiera att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2jnt/T} = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad (T\text{-periodiska fallet}) \tag{12'}$$

och speciellt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) \qquad (2\pi\text{-periodiska fallet}) \tag{12''}$$

Sambanden (12) – (12") är alltså likheter mellan *generaliserade* funktioner och är med den klassiska analysens synsätt meningslösheter. Exempelvis är vänsterleden divergenta serier[2] som saknar (klassisk) summa! Inte desto mindre kan man använda sambanden för att förhållandevis lätt härleda ”klassiska” resultat som är mycket svåra att få fram med andra metoder.

Om man t.ex. multiplicerar ekvationen (12") med en funktion $x(t)$ som är kontinuerlig åtminstone i punkterna $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, får man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{jnt} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - 2\pi n) = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2\pi n)\delta(t - 2\pi n) \tag{13}$$

och sedan integrerar leden över hela reella axeln, så får man en mycket generell summationsformel[3]

2 En i klassisk mening konvergent series termer måste → 0. Termerna i summan i vänster led har alla beloppet 1 så den kan inte vara konvergent.

3 Fler ”snällhetsvillkor” på funktionen x behövs också (krav på konvergens av ytterledens summor och integral t.ex.) om sambandet skall kunna tolkas ”klassiskt”. Vi går dock inte in på detta närmare här. Litet slarvigt kan man säga att den i praktiskt förekommande fall stämmer om ytterleden är meningsfulla från ”klassisk” synpunkt. Sambandet kallas också efter sin upptäckare *Poissons summationsformel*.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t\right) = 2\pi\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-2\pi n)\,\mathrm{d}t\right) = 2\pi\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2\pi n) \tag{14}$$

Anmärkning: Detta samband är (ett speciellt fall) av den s.k. *Poissonska summationsformeln*. För att den skall vara giltig i ”klassisk” mening måste funktionen $x(t)$ ha en del ”snällhetsegenskaper” (krav på konvergens av ytterledens summor och integral t.ex.). Vi går dock inte in på detta närmare här. Litet slarvigt kan man säga att den i praktiskt förekommande fall stämmer om ytterleden är meningsfulla från ”klassisk” synpunkt.

För de fall då funktionen x är = 0 utanför intervallet $-2\pi < t < 2\pi$ men inom detta intervall varierar på ett godtyckligt sätt, så förenklas högerledet till en enda term $2\pi\cdot x(0)$ och man får sambandet:

$$\text{Om } c_n = \int_{-2\pi}^{2\pi} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t,\ \text{så är } \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = 2\pi\cdot x(0) \tag{15}$$

Exempel 4.1

Låt $x(t) = \mathrm{rect}_{2a}(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } |t| < a, \\ 0, & \text{om } |t| > a, \end{cases}$ där $0 < a < 2\pi$. Då vet vi enligt ovan att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-2\pi}^{2\pi} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t\right) = 2\pi\cdot x(0) = 2\pi.$$

Integralen i vänsterledet är inte svår att beräkna:

$$c_n = \int_{-2\pi}^{2\pi} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} 1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t = [\text{Om } n \neq 0] = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}}{\mathrm{j}n}\right]_{-a}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}na} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}na}}{\mathrm{j}n} = \frac{2\sin na}{n}$$

och för $n = 0$:

$$c_0 = \int_{-2\pi}^{2\pi} x(t)\cdot 1\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}t = 2a.$$

Noterar man att $c_n = c_{-n}$, så kan summan, vars värde vi vet är 2π, skrivas

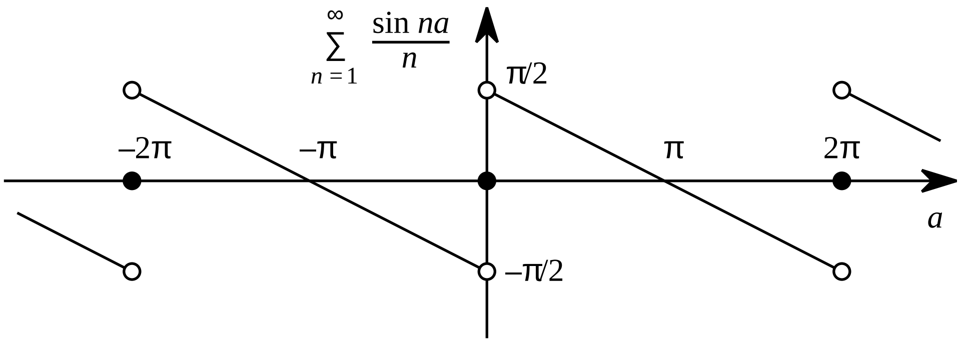
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2a + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin na}{n} = 2\pi$$

Man får alltså sambandet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2},\ \text{för } 0 < a < 2\pi.$$

Observerar man att vänsterledet, som funktion av a, är 2π-periodiskt och att det för $a = 0$ är $= 0$, så förstår man att summan är = den 2π-periodiska fortsättningen av funktionen

$$y(a) = \begin{cases} (\pi - a)/2 & \text{om } 0 < a < 2\pi, \\ 0, & \text{om } a = 0, \end{cases}$$



♦

Övning:

4.9 Plotta (t.ex med hjälp av MatLab) graferna för $\sum_{n=1}^{M} \frac{\sin na}{n}$, då M = 1, 5 respektive 11.

4.10 Använd resultaten från övning 3.9b (sid 18) och exempel 3.6 (sid 17) för att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n + \cos n - 1}{n^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - n \cos n}{n^3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}.$$

***4.11** Låt

$$x(t) = \begin{cases} t^2 & \text{om } |t| < \pi, \\ 0, & \text{om } |t| > \pi, \end{cases} .$$

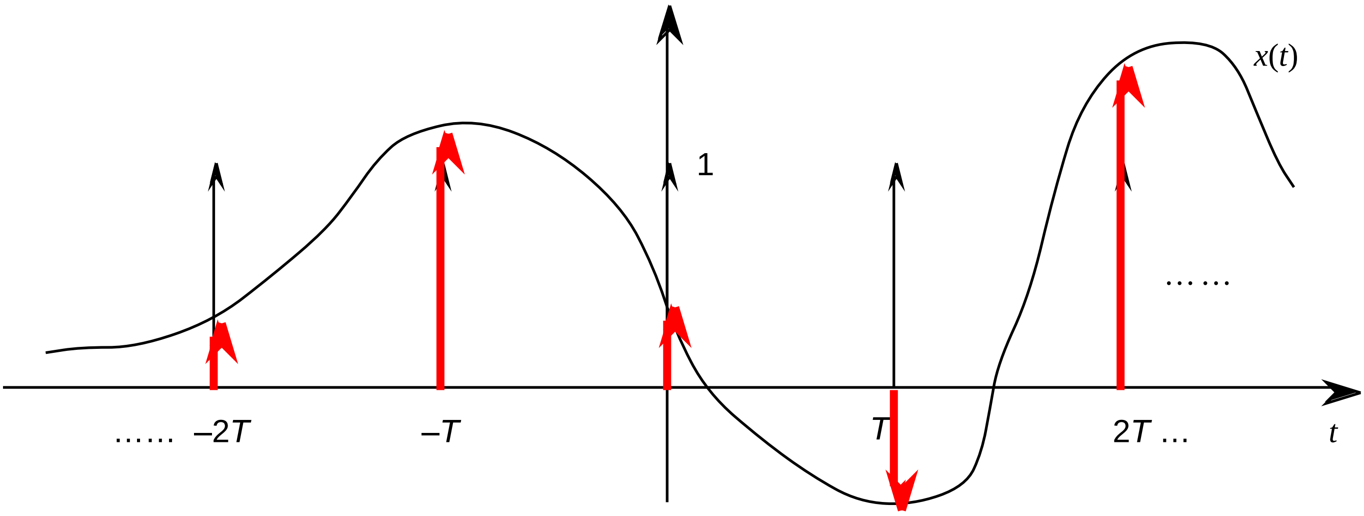
Vilken serie och seriesumma ger sambandet (12') med detta $x(t)$?

4.3 Sampling ↔ multiplikation med pulståg

Inkommande kontinuerligt definierade signaler $x(t)$ kan i allmänhet inte avläsas vid alla tidpunkter. Mer realistiskt är att de avläses vid tidpunkter $t = nT$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$: Man säger då att man *samplar* signalen med *sampelavståndet T*. *Sampelvärdena* ges då av följden $x[n] = x(nT)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Anmärkningsvärt nog kan motsvarande analytiska procedur koncist uttryckas med hjälp av pulstågs-funktioner, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Den samplade signalen svarar nämligen mot pulståget:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

Sampling med samplingsavståndet T av en kontinuerlig signal svarar mot att signalen *multipliceras* med pulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\ .$$

Övningar

4.12 Låt $x(t) = \cos t$. Skriv upp analytiska uttryck för sampelfunktionerna för sampelavstånden $T = \pi/2$ respektive π. Vilka är följderna av sampelvärden i de båda fallen?

4.13 Låt $x_T(t)$ vara samplingen av signalen $x(t)$ med sampelavståndet T.

a. Beräkna $I_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\,dt$.

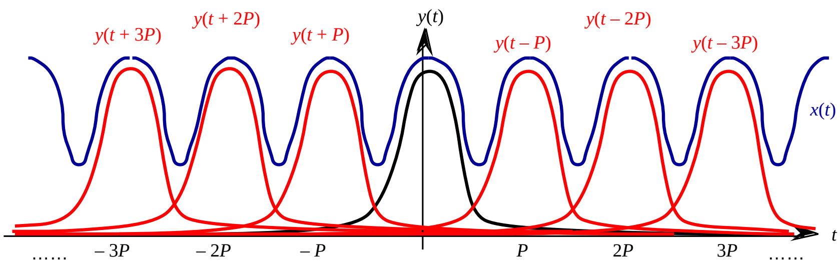
b. Vad bör gränsvärdet $\lim_{T\to 0+} T\,I_T$ rimligtvis ha för värde? (Rita figur!)

4.4 Periodisk fortsättning ↔ faltning med pulståg

Det visar sig att också operationen "att bilda den P-periodiska fortsättningen till en signal" har att göra med pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nP)$: Låt $x(t)$ vara den P-periodiska fortsättningen av funktionen $y(t)$:[4]

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nP)$$

4 Se sidan 6 i arbetsmaterial 1.



Nu har man att $y(t-nP) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\delta(t-\tau-nP)\,d\tau$, varför

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\delta(t-\tau-nP)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-nP)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,\Delta_P(t-\tau)\,d\tau. \quad (16)$$

där $\Delta_P(t)$ är pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nP)$

Den räkneoperation man gör med funktionerna $x(t)$ och $\Delta_P(t)$ i högra ledet i (16) är exempel på en så kallad *faltning* (eng. *convolution*). Allmänt definieras faltning $y*z$ mellan två funktioner $y(t)$ och $z(t)$ av

$$\boxed{(y*z)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, z(t-\tau)\,d\tau.} \quad (17)$$

Faltningen skall ses som ett ”räknesätt” mellan *funktioner* som producerar en ny funktion ur två givna.[5] Den visar sig spela en viktig roll i fourieranalysen.

Sammanfattningsvis:

> *P-periodisk fortsättning* av en signal svarar mot att signalen *faltas* med pulståget
> $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nP).$$

Övning

4.14 Förenkla $(\sin t \cdot \mathrm{rect}_{2\pi}(t)) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n\pi)$. (Rita figur!)

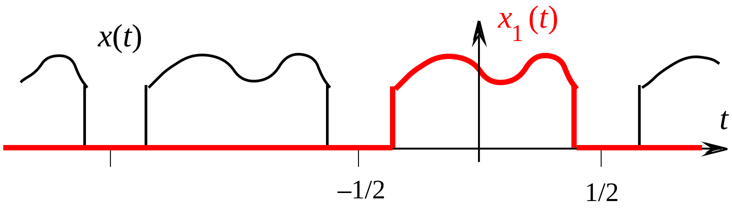
4.15 Beräkana $y(3\pi/2)$ då $y(t) = (\sin t \cdot \mathrm{rect}_{\pi}(t)) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\pi)$. (Rita figur!)

5. Fourierserier och fourierutveckling

4.1 Syntes- och analysekvationerna

Låt $x(t)$ vara en 1-periodisk funktion. Funktionen $x_1(t) = x(t) \cdot \mathrm{rect}_1(t)$ beskriver då x:s värden i fundamentalintervallet $-1/2 < t < 1/2$ och $x(t)$ är den 1-periodiska fortsättningen av $x_1(t)$.

5 Se också Olles kompendium



d.v.s. $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, \Delta_1(t-\tau)\, d\tau, \text{ där } \Delta_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

Summationsformeln (12): $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)\,,$$

gör det möjligt att skriva om uttrycket för $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n (t-\tau)} \right) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; e^{2\pi j n (t-\tau)} \right) d\tau.$$

Här är $e^{2\pi j n (t-\tau)} = e^{2\pi j n t} \cdot e^{-2\pi j n \tau}$, där den första faktorn tydligen är oberoende av integrationsvariabeln τ, alltså

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau}\; d\tau \right) e^{2\pi j n t}\,.$$

Men $x_1(\tau) = 0$ utanför intervallet $-1/2 \le \tau < 1/2$ och $= x(\tau)$ i det intervallet, varför

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau}\; d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau}\; d\tau,$$

vilket ger

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi j n t}\,, \\ \text{där } a_n &= \int_{-1/2}^{1/2} x(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau}\; d\tau\,. \end{aligned}} \quad (6$$

(FS$_1$)

Detta är (den komplexa varianten) av *Fouriers sats om serieutveckling av periodiska funktioner*. För periodiska funktioner med godtycklig period P finns förstås motsvarande samband:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi j n t / P}\,, \\ \text{där } a_n &= \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} x(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau / P}\; d\tau\,. \end{aligned}}$$

(Fourierserieutveckling, FS)

(7 (Fourierkoefficienter)

6 Observera att $x_{per}(t) = x(t)$ om $0 \le t < P$.

7 Sambanden återfinns i Oppenheim-Willsky på sid 191, där T spelar rollen av periodlängd och i Hjalmarssons kompendium på sid 31, där Y_k motsvarar a_k ovan.

Den första ekvationen kallas *syntesekvationen* och den andra *analysekvationen*.

Relationerna är mycket anmärkningsvärda bland annat eftersom $x(t)$ får ha ett godtyckligt beteende i intervallet $0 \le t \le P$: *Varje* generaliserad funktion definierad i intervallet $0 \le t \le P$ kan enligt (FS) skrivas som en (oändlig) linjär kombination av de komplexa exponentialfunktionerna

$$\ldots\ (e^{2\pi j t/P})^{-3},\ (e^{2\pi j t/P})^{-2},\ (e^{2\pi j t/P})^{-1},\ 1,\ e^{2\pi j t/P},\ (e^{2\pi j t/P})^{2},\ (e^{2\pi j t/P})^{3},\ \ldots,$$

d.v.s. av heltalspotenserna av funktionen $e^{2\pi j t/P} = \cos(2\pi t/P) + j\sin(2\pi t/P)$.

Man kan visa att inga andra koefficienter än fourierkoefficienterna duger i syntesekvationen. Mot varje generaliserad funktion $x(t)$ i intervallet $0 \le t \le P$ svarar alltså en unik en oändlig följd av (komplexa) tal, funktionens så kallade *spektrum*:

$$\ldots\ldots\ a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$$

som tillsammans innehåller *all* information om funktionen $x(t)$.

Exempel 5.1:

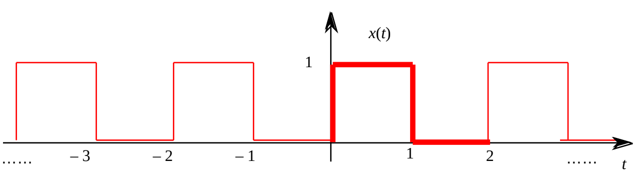
Funktionen $y(t) = 1$, då $0 \le t < 1$, $= 0$, om $1 \le t < 2$, har, då den utvecklas i en 2-periodisk fourierserie fourierkoefficienterna

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y(\tau)\, e^{-2\pi j n \tau/2}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot e^{-\pi j n \tau}\, d\tau = \left[\text{Om } n \ne 0\right] = \left[\frac{e^{-\pi j n \tau}}{-2\pi j n}\right]_{\tau=0}^{1} = \frac{1 - e^{-\pi j n}}{2\pi j n} =$$

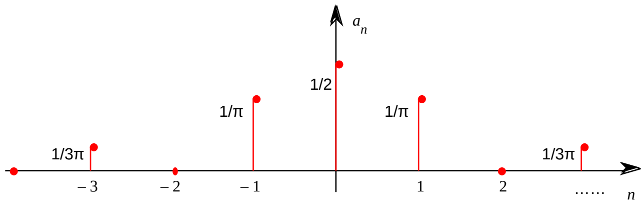
$$= \left[\text{Obs att } e^{-\pi j n} = (-1)^n, = 1 \text{ om } n \text{ jämnt}, = -1 \text{ om } n \text{ udda}\right] = 0 \text{ om } n \text{ jämnt} \ne 0 \text{ och } = \frac{1}{\pi j n} \text{ om } n \text{ udda.}$$

För $n = 0$ får man $a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 1 \cdot e^0\, d\tau = \frac{1}{2}$.

Funktionen



och beloppet av dess fourierkoefficienter



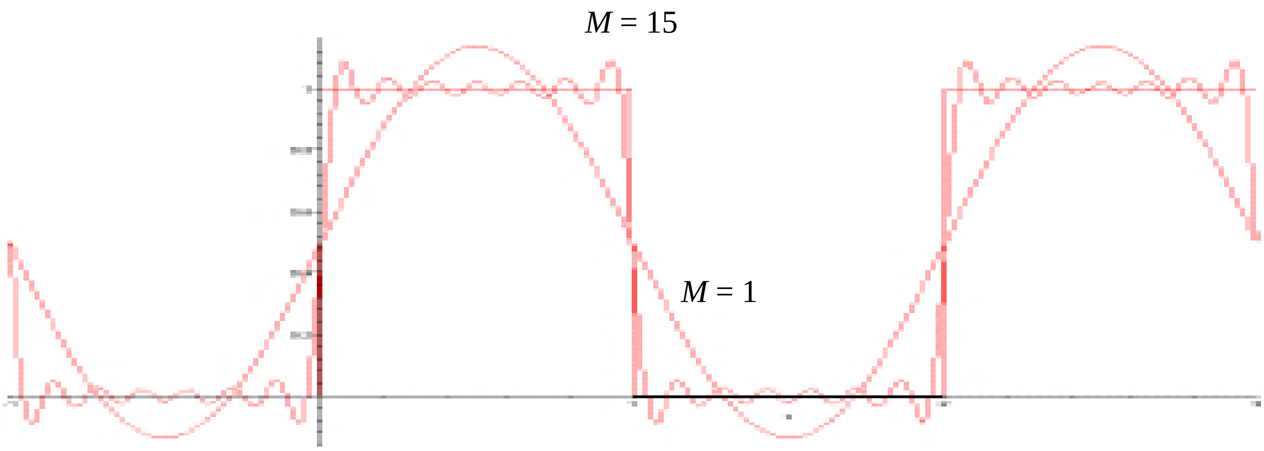
Syntesekvationen får utseendet

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi j}\left(\ldots - \frac{1}{7}e^{-7\pi j t} - \frac{1}{5}e^{-5\pi j t} - \frac{1}{3}e^{-3\pi j t} - e^{-\pi j t} + e^{\pi j t} + \frac{1}{3}e^{3\pi j t} + \frac{1}{5}e^{5\pi j t} + \ldots\right)$$

Antalet termer i serien är oändligt och likheten är i första hand en likhet i generaliserad mening men man kan förvänta sig att ändliga avsnitt av serien, som

$$y_M(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi j}\sum_{\substack{n=-M \\ n \text{ udda}}}^{M} \frac{1}{n}\, e^{\pi j n t}$$

med ökande M ger bättre och bättre approximationer till $y(t)$. Så är också fallet med undantag för t-värden nära diskontinuitetspunkter som $t = 1$.



$y(t)$ och dess 2-periodiska fortsättning, approximationerna y_1 och y_{15}.

♦

(Snarlika exempel finns i Hjalmarsson, sid 33, OW sid 192 –195, se särskilt exempel 3.5.)

Om $x(t)$ redan är en P-periodisk funktion, så är $x(t)$ identisk med den P-periodiska fortsättningen av funktionen $y(t) = x(t)$, $0 \le t < P$. Syntesekvationen ger därför att

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{2\pi j n t / P}, \text{ då } -\infty < t < \infty.$$

Eftersom integralen $\oint_{c}^{c+P} x(t)\, dt$ är oberoende av c om $x(t)$ är P-periodisk,[8] så spelar det ingen roll vilket intervall av längd P man integrerar över. OW använder beteckningen $\oint_P$ för sådana integrationer. Analysekvationen kan då skrivas:

$$a_n = \frac{1}{P} \oint_P x(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau / P}\; d\tau. \tag{18}$$

Exempel 5.2: För $x(t) = \delta(t)$, $-1/2 \le t < 1/2$ får man fourierkoefficienterna

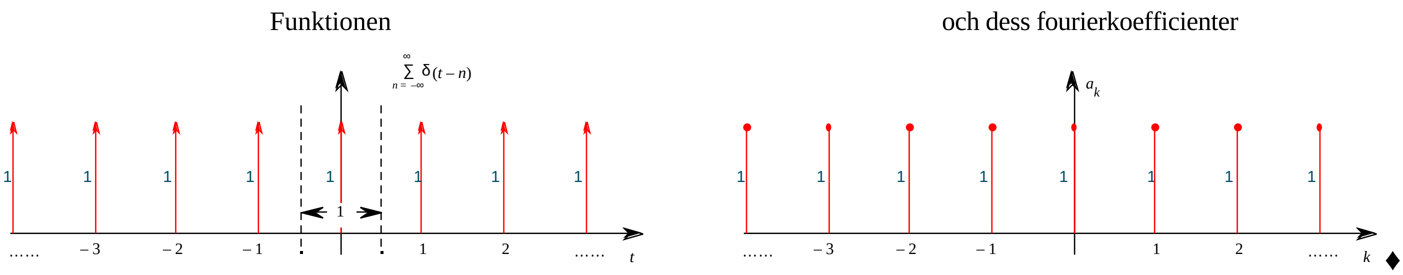
$$a_n = \oint_{-1/2}^{1/2} \delta(\tau)\; e^{-2\pi j n \tau}\; d\tau = 1.$$

Den 1-periodiska fortsättningen av $\delta(t)$ är pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$, varför syntesekvationen ger

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n t},$$

d.v.s. vi återfår sambandet (12) ovan.

8 Kan visas formellt genom att man deriverar integralen med avseende på c och utnyttjar att $x(c + P) = x(t)$. Genomför gärna detta!



Övning 1:

5.1a. Bestäm fourierkoefficienterna till de 1-periodiska funktionerna sin $2\pi t$ och cos $2\pi t$.

b. Bestäm fourierkofficienterna till den P-periodiska fortsättningen till $P\delta(t)$. Vilken blir syntesekvationen i detta fall?

5.2 Konvergensfrågor

Eftersom likheten i syntesekvationen är en likhet mellan generaliserade funktioner är det inte självklart att likheten gäller i klassisk mening, d.v.s. att

$$x(t) = \lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{M} a_n \, e^{2\pi j n t},$$

där limesbegreppet är som i den ”vanliga” analysen. Detta problem är inte alldeles enkelt att reda ut, men tillräckliga villkor finns uppskrivna i kurslitteraturen: Condition 1 – 3 i OW. s. 197 – 198 och Hjalmarsson, sid 32. Ett något enklare villkor, som nästan alltid är uppfyllt i alla praktiskt förekommande fall ges i följande sats:[9]

> Om $x(t)$ och $x'(t)$ [10] är styckvis kontinuerliga och har höger- och vänstergränsvärden i alla punkter så är
>
> $$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{M} a_n \, e^{2\pi j n t} = \frac{x(t+) + x(t-)}{2}.$$

Konvergens råder därför i praktiken ”alltid”, med undantag för de ställen där $x(t)$ är diskontinuerlig. Där blir seriesumman i stället = värdet mitt i språngintervallet. I sådana punkter uppträder också en komplikation som kallas Gibbs fenomen (se Hjalmarsson, sid 32 – och OW sid 198 – 201.)

5.3 Fourierserier på reell form (samma som Hjalmarsson §2.7)

Om $x(t)$ är en P-periodisk *reell* signal, så följer efter konjugering av syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, e^{2\pi j n t / P}$$

att

$$x(t) = x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^* \, e^{-2\pi j n t / P} = \left[\text{Byt } n \text{ mot } -n\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}^* \, e^{2\pi j n t / P}$$

Eftersom fourierkoefficienterna är unika, så måste detta innebära att $a_n = a_{-n}^*$. Detta medför att om vi parar ihop den n:te termen i syntesekvationen med den $(-n$:te $(n \neq 0)$, så kan vi skriva om dem:

$$a_n \, e^{2\pi j n t / P} + a_{-n} \, e^{-2\pi j n t / P} = a_n \, e^{2\pi j n t / P} + a_n^* \, e^{-2\pi j n t / P} = a_n \, e^{2\pi j n t / P} + \left(a_n \, e^{2\pi j n t / P}\right)^*$$

$$= 2 \,\mathrm{Re}\left(a_n \, e^{2\pi j n t / P}\right) = 2 \,\mathrm{Re}\left(a_n \left(\cos(2\pi n t/P) + j \sin(2\pi n t/P)\right)\right) = u_n \cos(2\pi n t/P) + v_n \sin(2\pi n t/P),$$

där

$$u_n = 2 \,\mathrm{Re}\, a_n \quad \text{och} \quad v_n = -2 \,\mathrm{Im}\, a_n.$$

Eftersom fourierkoefficienterna kan skrivas

---

24 Se också Zill-Cullen: sats 11.1, sid 492.

10 Derivatan i ”klassisk” mening – ingen generaliserad funktion – avses här.

$$a_n = \frac{1}{P}\int_0^P x(\tau)\ e^{-2\pi j n\tau/P}\ d\tau = \frac{1}{P}\int_0^P x(\tau)\cos(2\pi n\tau/P)\ d\tau - j\ \frac{1}{P}\int_0^P x(\tau)\sin(2\pi n\tau/P)\ d\tau\ ,$$

Här avläser man, för reella $x(t)$, a_n-koefficienternas real- och imaginärdelar, vilket ger

$$u_n = \frac{2}{P}\int_0^P x(\tau)\cos(2\pi n\tau/P)\ d\tau \ \text{ och } v_n = \frac{2}{P}\int_0^P x(\tau)\sin(2\pi n\tau/P)\ d\tau.$$

Kalkylen ovan omfattade inte fallet $k = 0$, men för detta n-värde har man

$$a_0 = \frac{1}{P}\int_0^P x(\tau)\ d\tau,$$

som är ett reellt tal. Sammanfattningsvis kan man alltså skriva syntesekvationen på formen

$$\boxed{x(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(u_k\cos(2\pi nt/P) + v_k\sin(2\pi nt/P)\big),}$$

där (de reella) fourierkoefficienterna ges av

$$\boxed{u_n = \frac{2}{P}\int_0^P x(\tau)\cos(2\pi n\tau/P)\ d\tau\ ,\ n \geq 0 \text{ och } v_n = \frac{2}{P}\int_0^P x(\tau)\sin(2\pi n\tau/P)\ d\tau,\ n \geq 1.}$$

Anmärkning 2: Detta är den historiskt sett ursprungliga formulering av Fouriers sats. Zill-Cullen kap 11.2 – 3, arbetar uteslutande med denna. Det som här betecknats u_n och v_n kallas i ZC a_k och b_k.
Vi har satt $u_0 = 2a_0$ bara för att slippa särbehandla fallet $n = 0$ i fourierkoefficientformeln. ♦

Exempel 5.3: Den 2-periodiska funktionen $y(t)$ i exempel 5.1 har de komplexa fourierkoefficienterna

$$a_n = 0,\ \text{om } n \text{ jämnt} \neq 0 \text{ och } = -\frac{j}{\pi n},\ \text{om } n \text{ udda samt } a_0 = \frac{1}{2}.$$

De reella fourierkoefficienterna är därför

$$u_n = 0,\ \text{om } n \neq 0 \text{ och } u_0 = 1,$$
$$v_n = 0,\ \text{om } n \text{ jämnt} \neq 0 \text{ och } = \frac{2}{\pi n},\ \text{om } n \text{ udda}$$

och man får den reella syntesekvationen

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ udda}}}^{\infty}\frac{1}{n}\ \sin(\pi nt)) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi t + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \ldots\right)$$ ♦

Anmärkning 3: Observera den inte så självklara summationsformel som man får om man t.ex. sätter $t = 1/2$ i det sistnämnda sambandet. Eftersom $x(1/2) = 1$ och $\sin(2n+1)\pi/2 = \sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$, så är

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) \text{ d.v.s. } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$ ♦

Övning 5.2: Bestäm den komplexa och den reella fourierserien för den 2π-periodiska funktion som är $= 1$ i intervallet $-\pi/2 < t < \pi/2$ och $= 0$ då $\pi/2 < t < 3\pi/2$.

5.4 Egenskaper

Mellan en periodisk funktion och dess fourierkoefficienter finns många rätt enkla samband. Några exempel:

Om den P-periodiska signalerna $x(t)$ och $y(t)$ har fourierseriekoefficienterna a_n resp. b_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, så gäller att

funktionen	har fourierseriekoefficienterna
$A\,x(t) + B\,y(t)$, A och B konstanta	$A\,a_n + B\,b_n$
$x'(t)$	$\frac{2\pi n\,\mathrm{j}}{P}\,a_n$
$x''(t)$	$-\frac{4\pi^2 n^2}{P^2}\,a_n$
$x^{(m)}(t)$	$\left(\frac{2\pi n\,\mathrm{j}}{P}\right)^m a_n$
$x(t-c)$	$\mathrm{e}^{2\pi n\,\mathrm{j}c/P}\cdot a_n$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nP)$	$a_n = \frac{1}{P}$

Notera att sambanden som rör derivering och translation blir speciellt enkla för 2π-periodiska funktioner.

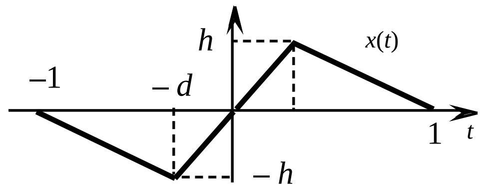
Ytterligare några egenskaper finns listade i OW sid 206 och i Hjalmarsson sid 34 – 36. Förutom att de har stort pricipellt intresse kan de ofta användas för att förenkla räknarbete.

Exempel 5.3:

Problem: Bestäm fourierutvecklingen till den 2-periodiska funktion som i intervallet $0 \le t \le 1$ ges av

$$x(t) = \begin{cases} ht/d, & \text{då } 0 \le t \le d, \\ h(1-t)/(1-d), & \text{då } d \le t \le 1 \end{cases}$$

och för vilken $x(-t) = -x(t)$.



Lösning: Syntesekvationen har utseendet $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} nt}$, där fourierkoefficienterna kan beräknas direkt ur analysekvationen. Enklare blir det dock om man observerar att x' och framför allt x'' är betydligt enklare funktioner än x:

$$x'(t) = = \begin{cases} h/d, & \text{då } 0 \le |t| < d, \\ -h/(1-d), & \text{då } d < |t| \le 1. \end{cases} \qquad \text{(Rita grafen!)}$$

och

$$x''(t) = \left(\frac{h}{d} - \frac{h}{1-d}\right)(\delta(t+d) - \delta(t-d)) = \frac{h}{d(1-d)}\,(\delta(t+d) - \delta(t-d)). \qquad (\dagger)$$

Deriverar man syntesekvationen 2 ggr får man att $x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pi \mathrm{j} n)^2 a_n\,\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} nt}$. Här avläser man att x'':s fourierkoefficienter $(\pi \mathrm{j} n)^2 a_n = -\pi^2 n^2 a_n$ erhålls ur

$$-\pi^2 n^2 a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x''(t)\,\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} nt}\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2d(1-d)}\left(\int_{-1}^{1}\delta(t+d)\,\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} nt}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}\delta(t-d)\,\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} nt}\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{h}{2d(1-d)}\,(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} nd} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} nd}) = \frac{\mathrm{j}h}{d(1-d)}\,\sin(\pi nd), \text{ varav för } n \ne 0:$$

$$a_n = -\frac{jh}{\pi^2 n^2 d(1-d)} \sin(\pi n d),$$

Återstår att beräkna a_0 som enligt analysekvationen är $= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\, dt$, d.v.s. funktionens medelvärde över en period. Detta medelvärde är i det här fallet uppenbarligen = 0.
Vi får alltså fourierserien

$$x(t) = -\frac{jh}{\pi^2 d(1-d)} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(\pi n d)}{n^2} e^{\pi j n t}.$$

Anmärkning: Alternativt kan man få fram resultatet utgående från uttrycket för andraderivatan (†) och egenskapstabellen ovan: De 2-periodiska fortsättningarna av respektive funktioner nedan har de angivna koefficienterna:

- $\delta(t) \leftrightarrow a_n = \frac{1}{2}$.
- $\delta(t \pm d) \leftrightarrow a_n = e^{\pm \pi n j d} \cdot \frac{1}{2}$.
- $x''(t) \leftrightarrow a_n = \frac{h}{d(1-d)} (e^{-\pi n j d} - e^{+\pi n j d}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{hj}{d(1-d)} \sin \pi n d$
- För $n \neq 0$: $x(t) \leftrightarrow a_n = -\frac{1}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{hj}{d(1-d)} \sin \pi n d$
- För $n = 0$ får vi som nyss direkt ur analysekvationen att $a_0 = 0$.

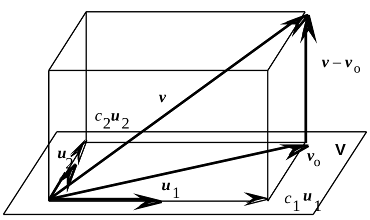
Detta ger svaret ovan. ♦

För ytterligare exempel se OW s. 206 – 209.

5.5 Samband mellan fourierserier och minstakvadratapproximation.

(Detta tema finns utförligare behandlat i Hjalmarsson, kap 1, se också ZC kap 11.1)

Partialsummor till en funktions fourierserie ger ofta kusligt bra approximationer till funktionen (jmfr exempel 5.1 ovan). Detta kan i på sätt och vis förklaras av att fourierutvecklingen i viss mening är optimal. Informellt kan man förstå hur detta hänger ihop via en geometrisk analogi, som för övrigt också ligger till grund för det generella approximationsförfarande som går under namnet ”minstakvadratmetoden”.



Anta att $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{v}$ är tre vektorer i rummet sådana att $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ spänner upp ett plan **V**. Om $\boldsymbol{v}$ ligger i detta plan, så kan $\boldsymbol{v}$ skrivas som en linjär kombination av $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 \tag{6}$$

Koefficienterna c_1 och c_2 är särskilt lätta att beräkna om vektorerna $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ är vinkelräta mot varandra, dvs då den skalära produkten $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$. Man har nämligen då att

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + c_2 \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = c_1|\boldsymbol{u}_1|^2,$$

varav

$$c_1 = (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v})/|\boldsymbol{u}_1|^2 \text{ och på samma sätt } c_2 = (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v})/|\boldsymbol{u}_2|^2 \tag{7}$$

Om $\boldsymbol{v}$ inte ligger i planet **V** så finns ingen möjlighet att uttrycka $\boldsymbol{v}$ med hjälp av $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ som i (6). Däremot finns det i planet **V** en vektor $\boldsymbol{v}_0$ som ligger närmast $\boldsymbol{v}$, nämligen den för vilken $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$ är vinkelrät mot planet, och alltså också mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$. Detta innebär att om $\boldsymbol{v}_0 = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$, så måste

$$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)\cdot \boldsymbol{u}_k = (\boldsymbol{v} - c_1\boldsymbol{u}_1 - c_2\boldsymbol{u}_2)\cdot \boldsymbol{u}_k = 0, k = 1, 2.$$

Detta ger igen sambanden (7) och man kan sammanfatta:

Den vektor i planet som ligger närmast $\boldsymbol{v}$ ges av

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}_1|^2}\ \boldsymbol{u}_1 + \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}_2|^2}\ \boldsymbol{u}_2$$

och ”felet” man gör då man approximerar $\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{v}_0$ ges av $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0|$. Enligt Pythagoras' sats (se fig) blir detta:

$$|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 - |c_1\boldsymbol{u}_1|^2 - |c_2\boldsymbol{u}_2|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 - |c_1|^2|\boldsymbol{u}_1|^2 - |c_2|^2|\boldsymbol{u}_2|^2.$$

Man ser också att

$$|\boldsymbol{v}|^2 \leq |c_1|^2|\boldsymbol{u}_1|^2 + |c_2|^2|\boldsymbol{u}_2|^2. \tag{8}$$

Om speciellt $\boldsymbol{v}$ ligger i planet $\mathbf{V}$, så kommer $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}$ och felet vara = 0, d.v.s likhet gäller

$$|\boldsymbol{v}|^2 = |c_1|^2|\boldsymbol{u}_1|^2 + |c_2|^2|\boldsymbol{u}_2|^2 \tag{9}$$

Förfarandet kan utan vidare generaliseras till vektorer i $\mathbf{R}^n$ och till flera ”basvektorer” $\boldsymbol{u}_k$ än två och även till vektorer i $\mathbf{C}^n$ med komplexa koordinater om man definierar skalärprodukt av två sådana vektorer med koordinater

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ och } \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

enligt

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k^* \ .$$

Normen (längden), $|\boldsymbol{x}|$, av en vektor definieras då av

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Anmärkningsvärt nog kan allt detta generaliseras till att handla om funktioner i stället för vektorer! Detta om man definierar ”skalärprodukt mellan två funktioner” $x(t)$ och $y(t)$ som

$$(x(t), y(t)) = \oint_b^c x(t)\, y^*(t)\, \mathrm{d}t, \text{ där } b < t < c \text{ är ett passande intervall}$$ [11]

och i analogi därmed ”normen av $x(t)$”, $||x(t)||$, enligt

$$||x(t)||^2 = (x(t), x(t)) = \oint_b^c |x(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

Man får en koppling mellan detta och fourierserieutveckling av P-periodiska funktioner om man definierar skalärprodukten och norm enligt

$$(x(t), y(t)) = \oint_P x(t)\, y^*(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{och} \quad ||x(t)||^2 = \oint_P |x(t)|^2\, \mathrm{d}t. \tag{10}$$

Syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} n t / P}$$

kan då uppfattas som att ”vektorn” $x(t)$ är en linjär kombination av (de oändligt många) ”vektorerna”

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} n t / P}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

där a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, är motsvarande koefficienter. Syntesekvationen uttrycker att alla funktioner exakt kan skrivas som en sådan linjär kombination av ”basfunktionerna” $u_n(t)$. Eller annorlunda uttryckt: ”Vektorn” $x(t)$ ligger i det ”rum” som ”vektorerna” $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} n t / P}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, spänner upp.

---

11 Beteckningen $(x(t),\ y(t))$ för skalärprodukten av två funktioner är rätt vedertagen. Observera att beteckningen $x(t) \cdot y(t)$ inte är lämplig eftersom den ju allmänt används när man multiplicerar två funktioner ”som vanligt”.

För dessa basfunktioner gäller nu att deras parvisa skalära produkter är = 0:

$$(u_m(t), u_n(t)) = \int_0^P e^{2\pi j m t/P} \cdot e^{-2\pi j n t/P}\, dt = \int_0^P e^{2\pi j (m-n) t/P} \cdot dt = \left[\text{Om } m \neq n\right] =$$

$$= \left[\frac{e^{2\pi j (m-n) t/P}}{2\pi j (m-n)}\right]_0^P = \frac{e^{2\pi j (m-n)} - 1}{2\pi j (m-n)} = 0, \text{ eftersom } e^{2\pi j k} = 1 \text{ för varje heltal } k.$$

Basfunktionerna är alltså parvis vinkelräta.

För normerna gäller

$$||u_n(t)||^2 = \int_0^P e^{2\pi j n t/P} \cdot e^{-2\pi j n t/P}\, dt = \int_0^P dt = P,$$

d.v.s. *basfunktionernas normer är alla* = $\sqrt{P}$.

Detta betyder att koefficienterna a_n i syntesekvationen bör kunna beräknas enligt principen (7) ovan

$$a_n = \frac{(x(t), u_n(t))}{||u_n(t)||^2} = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) \cdot e^{-2\pi j n t/P}\, dt$$

vilket inte är något annat än just analysekvationen.

Partialsummorna till fourierserien $x_M(t) = \sum_{n=M}^{M} a_k\, e^{2\pi j n t/P}$ kan uppfattas som den bästa approximation till $x(t)$ som man kan få genom att linjärkombinera de $2M+1$ funktionerna $e^{2\pi j n t/P}$, $n = 0, \pm 1, \ldots, \pm M$, på samma sätt som $\boldsymbol{v}_0$ approximerar $\boldsymbol{v}$ ovan. Felet vid approximationen mäts då med normen

$$||x(t) - x_M(t)||^2.$$

Tänker man på $x(t)$ som en signal så är normkvadraten ett mått på energin/period i signalen.[12] För signalen x_M kommer alltså bortfallet, i förhållande till signalen $x(t)$, energimässigt att vara så litet som möjligt. Detta är en viktig egenskap, t.ex. när man skall handskas med kompressionsproblem inom signalteorin.

Sambandet (9) ovan (”Phytagoras' sats”) kommer i fourierseriesammanhang att få utseendet

$$\int_0^P |x(t)|^2\, dt = ||x(t)||^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\, ||u_n(t)||^2 = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 .$$

Likheten kallas i dessa sammanhang *Parsevals relation* och kan tolkas i energitermer:

Syntesekvationen kan sägas dela upp en P-periodisk signal i sina delsvängningar $a_n\, e^{2\pi j n t/P}$

Energin/period hos en signal = summan av delsvängningarnas energier/period.

Den matematiska substansen i Parsevals relation är betydande, vilket något litet framgår av nästa exempel.

Exempel 12:

Enligt exempel 5.1 har vi för den 2-periodiska funktionen $y(t) = 1$, då $0 \leq t < 1$, $= 0$, om $1 \leq t < 2$, att

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi j}\left(\ldots - \frac{1}{7} e^{-7\pi j t} - \frac{1}{5} e^{-5\pi j t} - \frac{1}{3} e^{-3\pi j t} - e^{-\pi j t} + e^{\pi j t} + \frac{1}{3} e^{3\pi j t} + \frac{1}{5} e^{5\pi j t} + \ldots\right)$$

Parsevals relation ger då att

12 Obs att om $x(t)$ exempelvis är en elektrisk signal där x är strömstyrkan, så kommer x^2 att vara proportionell mot effekten och tidsintegralen mot något med dimension effekt × tid, dvs energi.

$$\|y(t)\|^2 = 2\left(\frac{1}{2^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{|\pi j n|^2}\right) = \frac{1}{2} + 2\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2}{(\pi n)^2},$$

där
$$\|y(t)\|^2 = \int_0^2 |y(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1,$$

varav
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ d.v.s. } 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$ ♦

4.1 a. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$, b. $\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

4.2 $\frac{1}{3}$.

4.3 $a\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \dots + \left(1+\frac{p}{100}\right)\right] = a\left(\frac{100}{p}+1\right)\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right]$.

4.7 P. (Summan av serien i uppgift **4.5** för $t = 0$, d.v.s. summan av $2M + 1 = P$ st. 1:or.)

4.11 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

4.12 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\pi/2)\,\delta(t-n\pi/2)$ respektive $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\pi)\,\delta(t-n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\delta(t-n\pi)$

	$n=$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	…
Följderna av sampelvärden:	…	0,	1,	0,	–1,	0,	1,	0,	–1,	0,	1,	0,	–1,	…
respektive	…	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	–1,	1,	

4.13 **a.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)$, **b.** $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$.

4.14 $\sin t$.

4.15 $\sin(-\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5.1a För $\sin 2\pi t$: $a_1 = 1/(2j)$, $a_{-1} = -1/(2j)$, $a_n = 0$ för övriga n.
För $\cos 2\pi t$: $a_1 = a_{-1} = 1/2$, $a_n = 0$ för övriga n.

5.1b $a_k = 1$ för alla k. Syntesekvationen: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t/P-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n t/P}$.

5.2. Komplex fourierserie: $\frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n}e^{jnt}$, reell fourierserie: $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\pi/2)}{\pi n}\cos nt$.