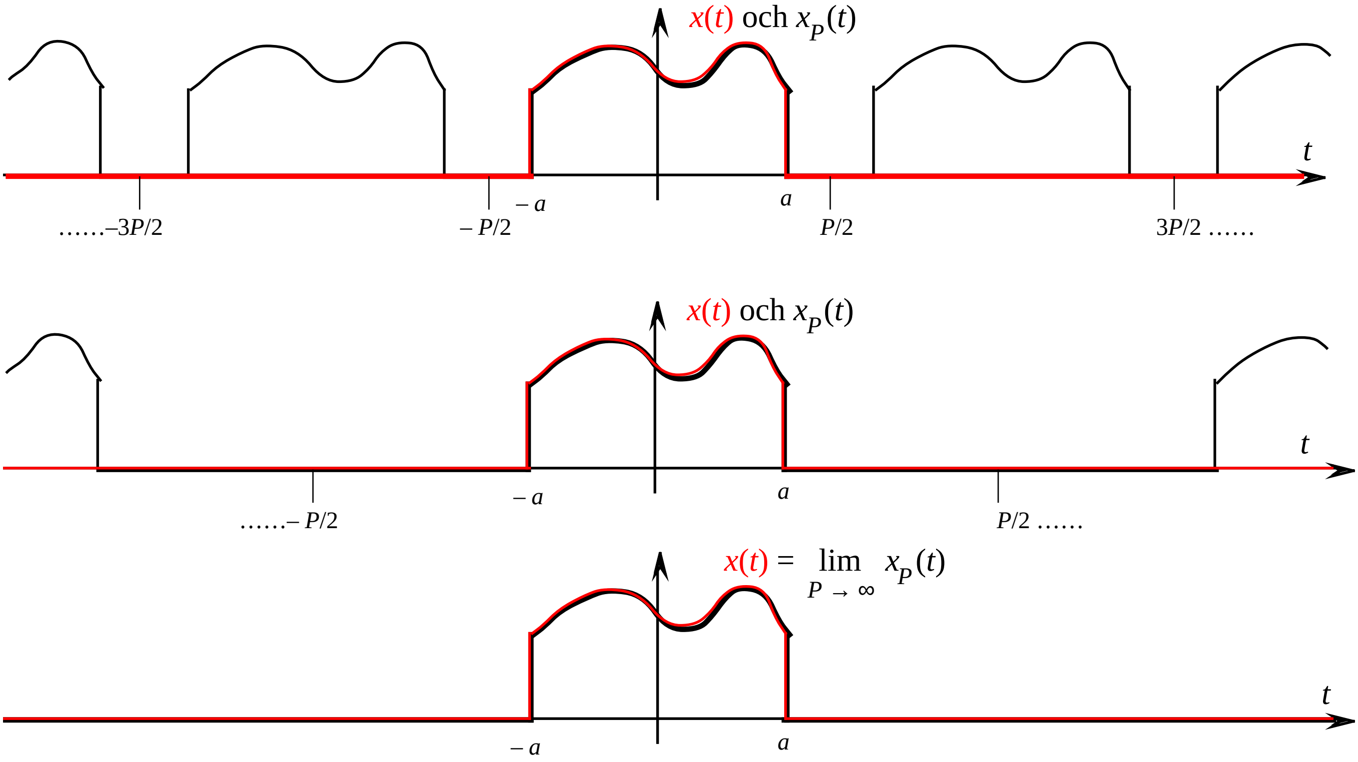
6. Tidskontinuerliga fouriertransformen

6.1. Heuristiska härledningar av den tidskontinuerliga fouriertransformen

6.1.1 Approximation av ”godtycklig” funktion med periodiska funktioner

Fourierseriers summa är alltid en periodisk funktion, och i stort sett varje periodisk funktion kan skrivas som (= representeras av) en fourierseriesumma. Det ligger nära till hands att söka efter liknande representationer för godtyckliga icke-periodiska funktioner genom att uppfatta dem som gränsfunktioner för följder av periodiska funktioner med succesivt växande periodlängd. Figurerna nedan illustrerar den idén:



Funktionen $x(t)$ är = 0 utanför intervallet $-a < t < a$, men för övrigt godtycklig. För $x_P(t)$, den P-periodiska fortsättningen av $x(t)$, gäller då att

$$\lim_{P \to \infty} x_P(t) = x(t).$$

Fourierkoefficienterna till fourierserieutvecklingen av $x_P(t)$ ges av

$$a_k = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x(\tau)\, e^{-2\pi j k\tau/P}\, d\tau = \left[\text{Om } P > 2a\right] = \frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j \tau\, k/P}\, d\tau$$

och enligt syntesekvationen har man att

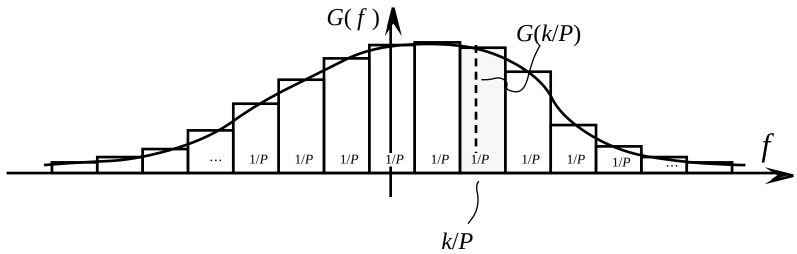
$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j \tau\, k/P}\, d\tau \cdot e^{2\pi j t\, k/P} \right)$$

Men uttrycket $\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j \tau\, k/P}\, d\tau\right) \cdot e^{2\pi j t\, k/P}$ är av formen $G\left(\frac{k}{P}\right)$ där

$$G(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j \tau f}\, d\tau\right) \cdot e^{2\pi j t f},$$

varför
$$x_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{P}\, G\left(\frac{k}{P}\right)$$

Den summa som vi har här är nära släkt med Riemansummorna som används vid definitionen av enkelintegral:



Varje term i summan svarar mot ”arean” av en ”rektangel” med ”sidorna” $\frac{1}{P}$ och $G\left(\frac{k}{P}\right)$. Den rektangelarean approximerar arean av motsvarande område mellan G:s graf och f-axeln. Med ökande p blir rektanglarna smalare och smalare och approximationerna sussesivt bättre och då $P \to \infty$ kommer summan att $\to \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, df$.

Sätter man
$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j \tau f}\, d\tau,} \tag{24}$$

så är $G(f) = X(f) \cdot e^{2\pi j t f}$ och man får
$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{2\pi j t f}\, df.} \tag{25}$$

Detta par av samband är analys- respektive syntesekvationerna för den *tidskontinuerliga fouriertransformen* (FT). Funktionen $X(f)$ kallas också *fouriertransformen* av funktionen $x(t)$ eller *spektrumet* av signalen $x(t)$. I motsats till periodiska signaler som har ett *diskret* spektrum (en fourierkoefficient a_k för varje heltal k), så har icke-periodiska signaler ett *kontinuerligt* spektrum (ett värde på $X(f)$ för varje reellt tal f).

Man kan visa att sambanden (24) och (25) gäller allmänt för de generaliserade funktioner som motsvarar signaler definierade på hela tidsaxeln.[1]

Syntesekvationen (25) kan sägas uttrycka en ”godtycklig” funktion som en linjär kombination (låt vara en oändlig sådan) av harmoniska svängningar $e^{2\pi j t f}$. Sett på det sättet anger analysekvationen (24) den ”vikt”, $X(f)$, som frekvensen f har i denna linjära kombination.

---

1 Resonemanget ovan motsvaras i OW av § 4.1.1.

Man kan resonera sig fram till formelparet (24) och (25) på mångahanda vis. Ett mera direkt förfarande som inte går omvägen över fourierserierna skissas i nästa avsnitt. Den innehåller också en omskrivning av δ-funktionen som är intessant i sig.

6.1.2 Härledning med hjälp av δ-funktionen

δ-funktionen som summa av harmoniska vågor (Hj §4.2.2)

En kontinuerlig morsvarighet till summan $\sum_{k=-M}^{M} e^{2\pi jk\alpha}$ ges av integralen

$$d_{2M} = \int_{-M}^{M} e^{2\pi j\alpha t}\, dt,$$

där man så att säga summerar harmoniska svängningar för *alla* frekvenser i ett visst intervall.

För summan $\sum_{k=-M}^{M} e^{2\pi jk\alpha}$ härleddes i arbetsmaterial 3 att man efter gränsövergång $M \to \infty$ for likheten

mellan generaliserade funktioner

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jn\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - n). \tag{12}$$

Vi skall se att man har en motsvarande relation för integralfallet.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j\alpha t}\, dt = \delta(\alpha).} \tag{26}$$

Integralen d_{2M} kan beräknas med standardmetoder:

För $\alpha \neq 0$ är

$$d_{2M} = \left[\frac{e^{2\pi jt\alpha}}{2\pi j\alpha}\right]_{t=-M}^{M} = \frac{e^{2\pi jM\alpha} - e^{-2\pi jM\alpha}}{2\pi j\alpha} = \left[\frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j} = \sin\beta\right] = \frac{\sin 2\pi M\alpha}{\pi\alpha}$$

och för $\alpha = 0$ får man den konstanta integranden 1, varför värdet blir integrationsintervallets längd $2M$.

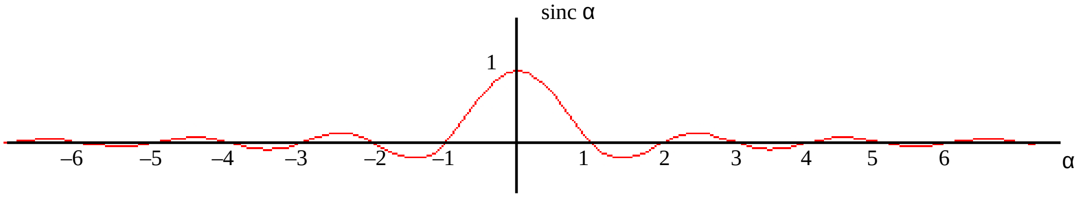
Sätter vi denna till P,[2] så får vi

$$d_P(\alpha) = \frac{\sin P\pi\alpha}{\pi\alpha}, \text{ då } \alpha \neq 0 \text{ och } = P, \text{ då } \alpha = 0.$$

Man kan få visst grepp om hur denna funktion beror av sina två variabler P och α genom att göra följande observationer:

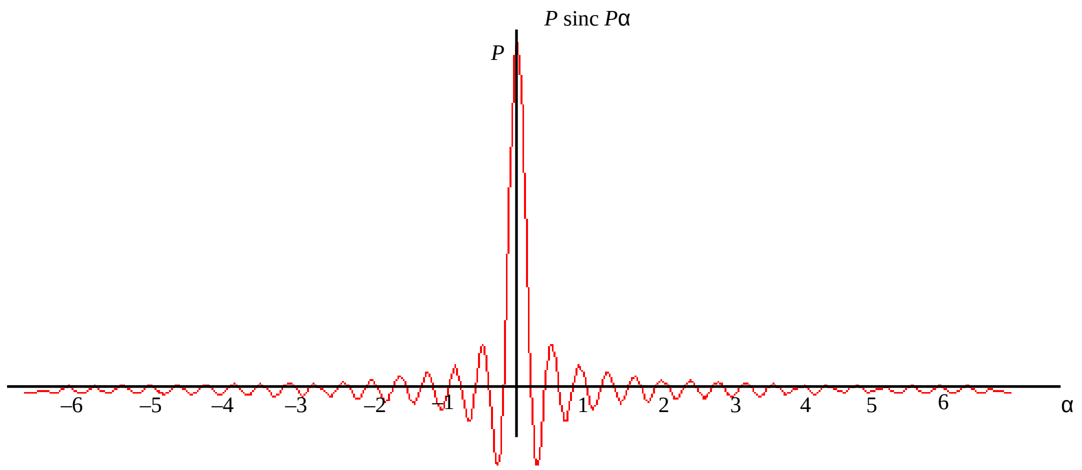
- För $P = 1$ får vi funktionen $\dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$. Den har fått ett särskilt namn – *sinus cardinalis*, förkortat sinc.

2 Observera analogin med summafallet, där P betecknade antalet termer i summan.



med nollställen i heltalspunkterna $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

- Eftersom $\dfrac{\sin P\pi\alpha}{\pi\alpha} = P\,\dfrac{\sin P\pi\alpha}{P\pi\alpha} = P \operatorname{sinc} P\alpha$, så får man att dess graf erhålls ur grafen för sinc α genom en ”areabevarande” deformation av den typ som beskrevs i avsnitt 1.8 – en hoptryckning i skalan P i horisontell led och en töjning i skalan P i vertikal led:



Grafen har för stora P en markant topp i origo och svänger med dämpning. Dess nollställen ligger i punkterna $\alpha = \pm 1/P, \pm 2/P, \pm 3/P, \dots$, d.v.s. allt tätare med växande P.

- Den ”areabevarande” skalningen innebär att

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_P(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \alpha \, d\alpha .$$

Värdet av dessa integraler är alltså oberoende av P, d.v.s. en konstant.

Med metoder som går en bra bit utöver de integrationsförfaranden som beskrivs i grundkurserna kan man visa att den konstanten är = 1. [3] Vidare gäller att $\int_a^b d_P(\alpha)\mathrm{d}\alpha \to 0$, då $P \to \infty$ för alla intervall $a \le \alpha \le b$ som *inte* innehåller talet 0.

Litet slarvigt men träffande kan man därför säga att $d_P(\alpha)$ för stora P tycks approximera δ-pulsen $\delta(\alpha)$. Man kan strikt visa att det faktiskt är så. Man har det *exakta* sambandet:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j\alpha t}\,\mathrm{d}t = \delta(\alpha)} \tag{26}$$

Härledning av fouriertransformen

Byter man i (26) beteckningar: t mot f och α mot $t - \tau$ (t variabel, τ konstant), så får man relationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j(t-\tau)f}\,\mathrm{d}f = \delta(t-\tau)$$

Mulitpliceras detta med den ”godtyckliga” funktionen $x(t)$ får man

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{2\pi j(t-\tau)f}\,\mathrm{d}f = x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau).$$

Efter integration med avseende på τ, $-\infty < \tau < \infty$, blir detta

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{2\pi j(t-\tau)f}\,\mathrm{d}f\right)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau).\mathrm{d}\tau$$

Kastar man i vänster led om integrationsordningen[4] och konstaterar att $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t)$, får man

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{2\pi j(t-\tau)f}\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}f = x(t).$$

---

[3] De primitiva funktionerna till sinc-funktionen kan tyvärr inte uttryckas med hjälp av de elementära funktionerna, så integrationssambandet $\int_a^t x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t) - x(a)$ är dessvärre inte till någon nytta här!

[4] Det är inte självklart att denna omkastning bevarar integralens värde – generellt spelar det roll i vilken ordning två på varandra följande gränsprocesser (som t.ex. integrationer) utförs, men man kan visa att omskrivningen i det här fallet är tillåten för alla ”rimliga” funktioner $x(t)$.

I den inre integralen kan exponentialfunktionen skrivas $e^{2\pi j(t-\tau)f} = e^{2\pi jt} \cdot e^{-2\pi j\tau f}$ där den första faktorn tydligen är oberoende av τ, varför

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jtf} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-2\pi j\tau f} \, d\tau \right) df = x(t).$$

Detta kan skrivas

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{2\pi jtf} \, df, \text{ där}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-2\pi j\tau f} \, d\tau ,$$

vilket är just syntes- och analysekvationerna (24) och (25) ovan.

6.1.3 Faltning och fouriertransform

Räkneoperationerna i den senare härledningen kan uttryckas koncisare med hjälp av faltningsoperationen som nämndes i arbetsmaterial 3 (sid 25): Med *faltningen*, $x*y$, av två funktioner $y(t)$ och $z(t)$ menas funktionen

$$\boxed{(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \, y(t-\tau) \, d\tau.}$$

Vi observerar först några viktiga allmänna egenskaper hos faltningen:

- *Faltning är ett kommutativt räknesätt.*
  Genom att i integralen substituera $t - \tau = \sigma$ (genomför detta) och sedan byta plats på faktorerna i integranden får man

$$\boxed{x*y = y*x.} \qquad (27)$$

Man betraktar gärna faltning som ett slags multiplikationsliknande räknesätt. Direkt ur definitionen får man följande egenskap som man känner igen från den ”vanliga” multiplikationen,

- *Faltning är linjär i varje ”faktor”.*
  För godtyckliga $x(t), y_1(t)$ och $y_2(t)$ samt konstanter a_1 och a_2 gäller

$$\boxed{x*(a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2) = a_1 \cdot (x*y_1) + a_2 \cdot (x*y_2).} \qquad (28)$$

  Båda leden kan nämligen skrivas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \, (a_1 \cdot y_1(t-\tau) + a_2 \cdot y_2(t-\tau)) d\tau.$$

  Detta kan utan vidare utsträckas till summor med ett godtyckligt ändligt antal termer:

$$\boxed{x * \sum_{n=0}^{N} a_n\, y_n \;=\; \sum_{n=0}^{N} a_n\, (x*y_n).}$$

och, bortsett från lämpliga krav på konvergensförloppet[5], så gäller motsvarande också för oändliga serier

$$\boxed{x * \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, y_n \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, (x*y_n).} \tag{28´}$$

Om funktionen y förutom av t beror av en ytterligare parameter, nedan kallad f, så gäller i samma anda att

$$\boxed{x(t) * \int_{-\infty}^{\infty} y(t,f)\, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)*y(t,f)\, \mathrm{d}f\,.} \tag{28´´}$$

Båda leden kan nämligen skrivas som dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{R}^2} x(\tau)\, y(t-\tau\,, f)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}f.$$

- *Faltning är ett associativt räknesätt*
För godtyckliga $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ gäller

$$\boxed{(x*y)*z = x*(y*z).} \tag{29}$$

Båda leden kan nämligen efter variabelsubstitution skrivas som dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{R}^2} x(\tau)\, y(\sigma)\, z(t-\tau-\sigma)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\sigma.$$

- δ-funktionen spelar rollen av en enhet – om man ”multiplicerar”, d.v.s faltar, med den så ”händer” ingenting:

$$(x*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \;=\; x(t), \text{ eller}$$

$$\boxed{x*\delta = x.} \tag{30}$$

- För exponentialfunktionerna $y(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} t f}$ gäller

$$(x*y)(t) \;=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}(t-\tau) f}\, \mathrm{d}\tau \;=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} t}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\tau f}\, \mathrm{d}\tau \;=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} t}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\tau f}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\tau f}\, \mathrm{d}\tau \right) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} t} = X(f)\cdot y(t),$$

[5] Preciseras inte här. För alla signalteoretiskt ”rimliga” situationer är sådana krav uppfyllda.

där $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot e^{-2\pi j\tau f}\, d\tau$$

tydligen är det som vi ovan kallat fouriertransformen av $x(t)$, d.v.s analysekvationen (25).

$$\boxed{x(t) * e^{2\pi jtf} = X(f)\cdot e^{2\pi jtf}.} \tag{31}$$

Om en exponentialfunktion faltas med en godtycklig funktion så får man tillbaka samma exponentialfunktion *multiplicerad* med en frekvensberoende faktor och den faktorn är just fouriertransformen till den funktion man faltat exponentialekvationen med.

Anmärkning: För linjära avbildningar i $\mathbf{R}^n$ och deras matrisrepresentanter talar man som bekant om egenvektorer och egenvärden: Vektorn $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ är egenvektor och λ är egenvärde till den linjära avbildningen (eller matrisen) $\boldsymbol{A}$ om

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}.$$

För fixerat (men godtyckligt) $x(t)$ så ordnar räkneoperationen $x*y$ en ny funktion till varje funktion y. Den tillordningen, som vi har sett är linjär, kan sägas vara analog med de ovannämnda linjära avbildningarna – den linjära avbildningen $\boldsymbol{A}$ svarar då emot funktionen x och den variabla vektorn $\boldsymbol{v}$ mot funktionen y. Övertar man terminologin från den linjära algebran, så kan man säga:

> Exponentialfunktionerna $e^{2\pi jtf}$ är egenfunktioner till operationen ”falta med x”
> och motsvarande egenvärde ges av fouriertransformen $X(f)$.

Syntesekvationen (24) erhåller man nu genom att integrera sambandet (31) med avseende på frekvensvariabel f: Man får nämligen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) * e^{2\pi jtf}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot e^{2\pi jtf}\, df,$$

där vänsterledet enligt (28´´), (26) och (30) är identiskt med

$$x(t) * \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jtf}\, df = x(t) * \delta(t) = x(t).$$

6.2 Olika beteckningar

I litteraturen används olika skalningar av variabeln på transformsidan. Variabeln f, som används i Hj:s kompendium och ovan, är den så kallade frekvensen. Den mäts i Hz =[1/s], ”perioder per sekund”. I OW används istället vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi f$, ”radianer per sekund”. Sambandet (24) blir då

$$X(\omega/(2\pi)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{24_{OW}}$$

Funktionen i vänster led betecknar OW med $X(j\omega)$. Obs alltså att X inte betyder samma sak i de båda fallen!

Sambandet (25) övergår efter substitutionen $f = \omega/(2\pi)$ i integralen och med OW:s X till

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{25_{OW}}$$

Vi håller oss här till Hj: s beteckningar. Se också Hj §4.7.

Ibland skrivs fouriertransformen av x som $\mathcal{F}(x)$. Ytterligare en beteckning som förekommer i litteraturen är $\hat{x}$.[6]

Lämpliga exempel att titta på: OW Ex 4.1 5, sid 290ff.

Övningar:

6.1 Beräkna

a. $e^{-|t|} * 1$, b. $e^{t} * u(t)$, c. $e^{-t} * u(-t)$, d. $e^{-|t|} * t$,

e. $\text{rect}_1(t) * 1$, f. $\text{rect}_1(t) * t$, g. $\text{rect}_1(t) * t^2$,

h. $\text{rect}_1(t) * u(t)$, (rita figur!), i $\text{rect}_1(t) * \text{rect}_1(t)$, (rita figur!)

j. $u(t) * u(t)$, (rita figur!), k. $e^{-t} * \text{rect}_1(t)$, l $\{e^{t} \cdot u(t)\} * e^{2t}$,

m. $e^{-|t|} * e^{jt}$ n. $e^{-|t|} * \cos t$, o. $e^{-|t|} * \sin t$, p. $\delta(t-1) * \delta(t-1)$.

6.2 Verifiera följande allmänna relationer (a och b är en godtyckliga reella konstanter):

a. $\delta(t-a) * y(t) = y(t-a)$,

och om $x(t) * y(t) = z(t)$

b, $x(t-a) * y(t) = x(t) * y(t-a) = z((t-a)$,

c. $x(t-a) * y(t-b) = z(t-a-b)$,

d. $x(-t) * y(-t) = z(-t)$.

6.3 Funktionen $x(t)$ är sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ är konvergent. Verifiera följande allmänna relationer.

a. $x(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$, b. $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$,

och för de fall då $x(t)$ dessutom är en jämn reellvärd funktion:

c. $x(t) * \cos(2\pi ft) = X(f) \cdot \cos(2\pi ft)$, d. $x(t) * \sin(2\pi ft) = X(f) \cdot \sin(2\pi ft)$,

(*Ledning*: Obs att $x(t)$ är jämn och reellvärd (om och) endast om $X(f)$ också är (jämn och) reellvärd.)

6.4 Vilka är relationerna motsvarande dem i 6.3c och d om $x(t)$ istället är en udda, reellvärd funktion?

6.3 Egenskaper hos transformen (Se också tabell i OW sid 328-9 och Josefssons samling)

De allmänna egenskaperna hos den tidskontinuerliga transformen är av samma slag som för fourierserierna (FS). De viktigaste finns listade i OW §4.6, Table 4.1. Se också Hjalmarsson §4.4. Härledningarna är i de flesta fall rättframma (se OW §4.3 och Hj §4.4). Exempelvis inses att

$$\text{om } x(t) \text{ är en } \begin{Bmatrix} \text{jämn} \\ \text{udda} \end{Bmatrix} \text{ funktion, så är också } X(f) \text{ en } \begin{Bmatrix} \text{jämn} \\ \text{udda} \end{Bmatrix} \text{ funktion,}$$

genom att enligt (24)

[6] I Hj brukar dock $\hat{x}$ stå för någon approximation till funktionen x.

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j\tau\,(-f)}\, d\tau = \left[\text{Byt } \tau \text{ mot } -\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)\, e^{-2\pi j\tau f}\, d\tau = \left[\text{Om } x \text{ jämn}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\pi j\tau f}\, d\tau = X(f), \text{ dvs } X \text{ är jämn.}$$

(a) Dualitet

Sambanden (24) och (25) är anmärkningsvärt symmetriska till sin konstruktion, man säger att de är *duala*: Analyssambandet (25) tillämpat på funktionen $X(t)$ ger att dess fouriertransform ges av

$$[\mathcal{F}(X)](t) = \hat{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\, e^{-2\pi j\tau t}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{2\pi j f(-t)}\, df = x(-t),$$

ett samband som också kan skrivas $\hat{\hat{x}}(t) = x(-t)$. Obs speciellt att om x (eller X) är en jämn funktion så är $\hat{X} = x$ och $\hat{\hat{x}} = x$.

Det är naturligt att upprätta tabeller över funktioner och deras transformer. Table 4.2 i OW är en sådan. Dualitetsegenskapen ovan kan i en sådan tabell skrivas:

	Funktion	Transform
Om	$y(t)$	$Z(f)$
så gäller	$Z(t)$	$y(-f)$

(b) δ-funktionen ↔ Konstanten 1

Om $x(t) = \delta(t)$ så är $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-2\pi j\tau f}\, d\tau = e^0 = 1$. Dualiteten (obs δ är en jämn funktion) ger omedelbart att om $x(t) = 1$ så är $X(f) = \delta(t)$. I tabellform:

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$

(c) Förskjutning ↔ Multiplikation med harmonisk svängning

Ett par duala allmänna egenskaper är

Funktion	Transform
$e^{2\pi j a t}\, x(t)$	$X(f - a)$
$x(t - a)$	$e^{-2\pi j a f}\, X(f)$

Kombineras detta med resultatet i (a) får man

Funktion	Transform
$\delta(t - a)$	$e^{-2\pi j a f}$
$e^{2\pi j a t}$	$\delta(f - a)$

Speciellt så gäller för de trigonometriska funktionerna

Funktion	Transform
$\delta(t-a) + \delta(t+a)$	$e^{-2\pi j a f} + e^{2\pi j a f} = 2\cos(2\pi a f)$
$\cos(2\pi a t)$	$(\delta(f-a) + \delta(f+a))/2$

och

Funktion	Transform
$\delta(t+a) - \delta(t-a)$	$e^{2\pi j a f} - e^{-2\pi j a f} = 2j\sin(2\pi a f)$
$\sin(2\pi a t)$	$(\delta(f-a) - \delta(f+a))/(2j)$

(d) Skalning med faktor *a* ↔ Skalning med faktor 1/*a*

En annan självdual egenskap handlar om vad som sker med skalning av variablerna: Om tidsvariabeln t skalas om till at ($a > 0$), så skalas både transformvärde och frekvensvariabel om med faktorn $1/a$:

Funktion	Transform
$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right), a > 0$	$X(af)$

(e) Pulståg ↔ Pulståg

Funktionerna $\delta(t-n)$ har enligt ovan transformerna $e^{-2\pi j n f}$. Summerar man dessa, så får man att

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ har transformen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n f} = \left[\text{Enligt sambandet (12) sid 21 i Arb.matr 3}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$$

Funktionen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ är alltså sin egen fouriertransform!

Funktion	Transform
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$

Sampling vid tidpunkterna $t = nT$ svarar mot multiplikation med den generaliserade funktionen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T(t/T-n)) = \left[\delta(at) = \delta(t)/a\right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T-n).$$

Transformen för denna funktion är enligt skalningsegenskapen ($a = 1/T$):

	Funktion	Transform
Eftersom	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n)$	$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(Tf - n)$
så är	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(Tf - n) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$

(f) rect ↔ sinc

Integralen $d_P(f) = \int_{-P/2}^{P/2} e^{2\pi j f t}\, dt$ som beräknades på sidan 38 är också en fouriertransform, nämligen den av en funktion som är = 1 i intervallet $-P/2 < t < P/2$ och = 0 f.ö., d.v.s. av funktionen $\mathrm{rect}_p(t)$. Vi har alltså:

	Funktion	Transform
	$\mathrm{rect}_P(t)$	$P\,\mathrm{sinc}(Pf)$
speciellt	$\mathrm{rect}_1(t)$	$\mathrm{sinc}(f)$
dualt	$\mathrm{sinc}(Pt)$	$\frac{1}{P}\mathrm{rect}_P(f)$
och	$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}_1(f)$

(g) Steg- och signumfunktionerna

Ett intrikatare problem är att beräkna transformerna för stegfunktionen:

$$u(t) = 1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = 0, \text{ om } t < 0$$

och den besläktade signumfunktionen:

$$\mathrm{sign}(t) = \{1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = 1 \text{ om } t < 0\} = 2u(t) - 1.$$

För kännedom meddelas att man kan visa att

Funktion	Transform
$u(t)$	$\frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{1}{\pi j f}$

(h) Multiplikation ↔ Faltning(Se också OW §4.4-5)

För produkten av två funktioner $x(t)$ och $y(t)$ har man

$$x(t)\cdot y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\, e^{2\pi j t\phi}\, d\phi \int_{-\infty}^{\infty} Y(\varphi)\, e^{2\pi j t f}\, d\varphi = \iint_{\mathbf{R}^2} X(\phi)\, e^{2\pi j t\phi}\, Y(\varphi)\, e^{2\pi j t f}\, d\phi\, d\varphi =$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} X(\phi)Y(\varphi)\, e^{2\pi j t(\phi + \varphi)}\, d\phi\, d\varphi = \left[\text{Substituera: } \left\{\begin{array}{l} f = \phi + \varphi, \\ \phi = \phi. \end{array}\right\},\ d\phi\, d\varphi = d\phi\, df\right] =$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} X(\phi)Y(f-\phi)\, e^{2\pi j t f}\, d\phi\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)Y(f-\phi)\, d\phi \right) e^{2\pi j t \phi}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} Z(f)\, e^{2\pi j t f}\, df,$$

där $Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)Y(f-\phi)\, d\phi = (X * Y)(f)$ tydligen är transformen av $x(t)\cdot y(t)$.

Man har alltså

	Funktion	Transform
	$x(t)\cdot y(t)$	$(X * Y)(f)$
dualt	$(x * y)(t)$	$X(f)\cdot Y(f)$

Anmärkning: Att faltning efter fouriertransformation svarar mot multiplikation följer också ganska direkt av exponantialfunktionens roll som egenfunktion (se avsnitt 6.1.3). Vi har:

$$x(t) * e^{2\pi j t f} = X(f)\, e^{2\pi j t f},$$

$$y(t) * e^{2\pi j t f} = Y(f)\, e^{2\pi j t f},$$

Låter vi $Z(f)$ stå för transformen av $x(t) * y(t)$ så har vi

$$Z(f) \cdot e^{2\pi j t f} = (x(t) * y(t)) * e^{2\pi j t f} = x(t) * (y(t) * e^{2\pi j t f}) = x(t) * Y(f) \cdot e^{2\pi j t f}$$
$$= Y(f) \cdot (x(t) * e^{2\pi j t f}) = Y(f) \cdot X(f) \cdot e^{2\pi j t f}$$

Division med faktorn $e^{2\pi j t f}$ ger resultatet

$$Z(f) = Y(f) \cdot X(f)\ (= X(f) \cdot Y(f)).$$

(i) Derivering ↔ Multiplikation med variabel

Deriverar man analysekvationen får man

$$x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi j f X(f)\, e^{2\pi j t f}\, df$$

där man avläser att derivatans fouriertransform = $2\pi j f\, X(f)$:

	Funktion	Transform
	$\frac{d}{dt} x(t)$	$2\pi j f X(f)$
dualt	$2\pi j\, t\, x(t)$	$-\frac{d}{df} X(f)$

För högre derivator får man motsvarande:

	Funktion	Transform
	$\left(\frac{d}{dt}\right)^n x(t)$	$(2\pi j f)^n X(f)$
dualt	$(2\pi j t)^n x(t)$	$\left(-\frac{d}{df}\right)^n X(f)$

Exempel på beräkningar av fouriertransformer: I OW ex 4.11 – 13, 4.20 – 23. Titta också särskilt på ex 4.6 i Hj.

Övningar: Se kap 5 i exempelsamlingen. Här kommer ett par till:

6.5 Fouriertransformera $\mathrm{sinc}^2(t)$ genom att använda tabellen vid (f) ovan och produkt-faltnings-sambandet j. (Se också övning 6.1i ovan.)

6.6 I ett tabellverk hittar man att funktionen

$$e^{-a|t|} \text{ (Re } a > 0) \text{ har fouriertransformen } \frac{2a}{a^2 + \omega^2},$$

där $\omega = 2\pi f$. Verifiera, t.ex. med hjälp av sambanden i. ovan, att

$$\frac{2\omega j}{a^2 + \omega^2} \text{ är fouriertransformen av } (-\,\mathrm{sign}\, t) \cdot e^{-a|t|}.$$

6.7 Använd tekniken med uppdelning i partialbråk beskriven i Hj:s exempel 4.6 för att bestämma funktionerna $x(t)$ som har följande fouriertransformer:

a. $\frac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$, b. $\frac{\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$,

c. $\frac{j\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$, d. $\frac{j}{\omega^3 + 9\omega}$,

e. $\frac{\omega^2}{\omega^2 + 9}$.

(j) Transform av primitiv funktion

Den primitiva funktionen $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ kan ses som en faltning: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$

$(x * u)(t)$, Dess transform är alltså $X(f) \cdot \left(\frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right) = \frac{X(f)}{2\pi j f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$. (Jämför OW §4.3.4, se även Hj sid 32, där ett tryckfel insmugit sig vid denna formel.)

(k) Sampling med sampelavstånd $T \leftrightarrow$ $(1/T)$-periodisk fortsättning

Om en signal $x(t)$ samplas vid tidpunkterna $t = nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, så ges (se §4.3, sid 23) motsvarande sampelfunktion av

$$x_{\mathrm{sampel}}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Eftersom fouriertransformen för $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ är $\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/T)$, så är sampelsignalens transform:

$$X_{\text{sampel}}(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n/T) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f-n/T) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-n/T).$$

Man ser här att

Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T svarar mot $\frac{1}{T}$-periodisk fortsättning av $\frac{1}{T}X(f)$.

Transformens värde för en frekvens f är proportionell mot summan av värdena av X i de ∞ många frekvenserna på avståndet n/T från f. Dessa olika X-värden kan alltså inte särskiljas om man bara känner till $X_{\text{sampel}}(f)$. (Jämför diskussionerna om aliaseffekten Hj §3, 6.3, 8, OW §7.3.)

(l) Fourierserie som specialfall av fouriertransform (OW §4.2)

Om $x(t)$ är den P-periodiska fortsättningen av funktionen:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } |t| < P/2, \\ 0, & \text{om } |t| > P/2, \end{cases}$$

så har man (se §4.4, sid 24): $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t-kP) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kP)$.

Eftersom faltning svarar mot multiplikation på transformsidan (se (h)) och pulståg mot pulståg (se (e)) så ger detta

$$X(f) = X_0(f)\cdot\frac{1}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k/P) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{P} X_0(k/P)\,\delta(f-k/P) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(f-k/P),$$

där
$$a_k = \frac{1}{P} X_0\left(\frac{k}{P}\right) = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x(t)\, e^{-2\pi j k t/P}\, dt$$

tydligen är den k:te fourierkoefficienten för $x(t)$. Syntesekvationen (25) för fouriertransformen ger sedan

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(f-k/P)\, e^{2\pi j t f}\, df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-k/P)\, e^{2\pi j t f}\, df \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{2\pi j t k/P},$$

vilket är fourierserieutvecklingen av $x(t)$. ♦

Exempel att titta på: OW 4.6 – 8.

6.4 Parsevals relation. Informellt om utveckling i ortogonalbaser, signaler med ändlig energi och minstakvadratanpassning

Analys- och syntesekvationerna för fourierserierna kunde ges en ”geometrisk” tolkning (§5.5 Samband mellan fourierserier och minstakvadratapproximation):

Syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi j n t},$$

kunde ses som en koordinatframställning av ”vektorn” $x(t)$ i en ”bas” $u_n(t) = e^{2\pi j n t}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, av parvis ”vinkelräta vektorer”. ”Vinkelräthet” mellan två ”vektorer” $x(t)$ och $y(t)$ betyder här att ”skalärprodukten”

$$(x(t), y(t)) = \int_P x(t)\, y^*(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Fourierkoefficienterna a_n kan då ses som ”vektorn” $x(t)$:s koordinater med avseende på basen i fråga. Eftersom basvektorerna är vinkelräta mot varandra och alla har ”längden” $\sqrt{P}$, så erhåller man koordinaterna ur sambandet

$$a_n = \frac{(x(t), u_n(t))}{\|u_n(t)\|^2} = \frac{1}{P} \int_P x(t) \cdot e^{-2\pi j n t / P}\, \mathrm{d}t,$$

som är just analysekvationen för fourierserier.

I analogi med hur längden av en vektor beräknas ur dess koordinater i ett system med vinkelräta basvektorer

$$\boldsymbol{v} = \sum_n a_n u_n \qquad \|\boldsymbol{v}\|^2 = \sum_n |a_n|^2 \cdot \|u_n\|^2, \qquad \text{(”Pythagoras' sats”)}$$

så har man också för fourierserierna ett sådant samband

$$\|x(t)\|^2 = \sum_n |a_n|^2 \cdot P, \qquad \text{(”Parsevals relation”)}$$

I signalteorin kan detta tolkas som en energirelation:

Signalens energi/period = Summan av delsvängningarnas energier/period.

Sambanden mellan en funktion $x(t)$ och dess fouriertransform $X(f)$ kan uttydas på ett motsvarande sätt:

Syntes- och analysekvationerna för FT

Syntesekvationen
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{2\pi j t f}\, \mathrm{d}f,$$

kan ses som att man skrivit $x(t)$ som en linjär kombination av ”basvektorer” $u_f(t) = e^{2\pi j t f}$, där parametern f svarar mot nummervariabeln n ovan och $X(f)$ mot respektive koordinat. Definierar man ”skalärprodukt” mellan två ”vektorer” som ovan, fast med integrationen utsträckt över hela reella talllinjen,

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

så kommer basvektorerna vara parvis vinkelräta också här. Man har nämligen:

$$(u_f(t), u_h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j t f} \cdot e^{-2\pi j t h}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j t (f-h)}\, \mathrm{d}t = \left[\text{Enligt (26)}\right] = \delta(f-h) = 0 \text{ om } f \neq h.$$

”Koordinaterna” för $x(t)$ i ”u-basen” erhålls nu enligt analysekvationen enligt

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, \mathrm{d}t\,,$$

vilket är just skalärprodukten $(x(t), u_f(t))$.

Parsevals relation för FT

För signaler $x(t)$ där

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

är konvergent – d.v.s. de som har en (ändlig) total energi[7] – har man också en ”Parsevalsk” relation:

”Vektorns längd” i kvadrat = ”Summan” (läs *integralen*) av beloppskvadraterna på ”koordinaterna” $X(f)$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df} \tag{32}$$

Exempel

För funktionen $x(t) = \text{rect}_1(t)$ är normkvadraten (totalenergin)

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 \, dt = 1,$$

och vi vet (se §6.3(f)) att $X(f) = \text{sinc}\, f$. Parsevals relation utsäger då att

$$1 = \|X(f)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 f \, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi f}{\pi^2 f^2} \, df.$$

Efter litet hyfsning (sätt $\pi f = \tau$) kan detta skrivas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} \, d\tau = \pi,$$

ett resultat som inte alls är lätt att få fram utan hjälp av fouriermetoder! ♦

Minstakvadratapproximation och FT

Liksom för fourierserierna finns för fouriertransformen en koppling till minstakvadratapproximationer. Vill man approximera signalen $x(t)$ med en ”linjär kombination” av harmoniska svängningar med frekvenser f som inte överskrider ett visst tröskelvärde, $|f| \leq B$ (”bandbegränsnimg”),

$$x_a(t) = \int_{-B}^{B} a(f) \cdot e^{2\pi j t f} \, df,$$

så är $a(f) = X(f)$ det bästa valet av ”viktsfunktionen” $a(f)$ om man vill att ”energiförlusten” $\|x(t) - x_a(t)\|^2$ skall vara så liten som möjligt.

---

7 Alla funktionerna som vi betraktar i den matematiska modellen för signalteorin är inte av det slaget. Exempelvis är den totala energin hos konstanterna $\neq 0$ och hos δ-pulserna inte ändlig och inte heller hos periodiska funktioner i allmänhet.

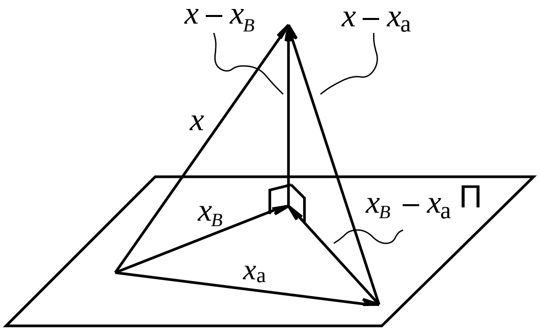
Om nämligen

$$x_b(t) \;=\; \int_{-B}^{B} X(f)\cdot e^{2\pi j t f}\; df,$$

så är ”felfunktionen”

$$x(t) - x_b(t) \;=\; \int_{|f|>B} X(f)\cdot e^{2\pi j t f}\; df \qquad e^{2\pi j t f}$$

för alla $|f| \le B$ och därmed också vinkelrät mot alla linjära kombinationer av dessa. Hit hör funktionerna x_a och x_B och deras differens $x_B - x_a$. För felet (läs ”energiförlusten”) som man gör med approximationen x_a gäller därför (se figuren – tänk på Pythagoras' sats):



Π: De funktioner som är linjära kombinationer av $e^{2\pi j t f}$ med $|f| \le B$.

$$\|x(t) - x_a(t)\|^2 = \|(x(t) - x_b(t)) + (x_B(t) - x_a(t))\|^2 = \|x(t) - x_b(t)\|^2 + \|x_B(t) - x_a(t)\|^2 =$$

$$= \|x(t)\|^2 - \|x_b(t)\|^2 + \|x_B(t) - x_a(t)\|^2 \ge \|x(t)\|^2 - \|x_b(t)\|^2. \qquad (33)$$

Felet är alltså minst $= \|x(t)\|^2 - \|x_a(t)\|^2$ och detta uppnår man om och endast om $\|x_B(t) - x_a(t)\| = 0$, d.v.s. om och endast om $x_B(t) = x_a(t)$.

Övningar: OW 4.10, 4.14, Exsamling 5.21.

6.8 Ett idealt lågpassfilter har den egenskapen att det släpper igenom en signals alla frekvenser upp till en viss nivå L med oförändrade amplituder, medan de högre frekvenserna inte släpps igenom alls.

a. Om $x(t)$ har fouriertransformen $X(f)$, uttryck med hjälp av rect-funktionen transformen $X_L(f)$ för den filtrerade signalen $x_L(t)$.

b. Bestäm $X_L(f)$ då $x(t) = e^{-t}\, u(t)$. $u(t)$ = ”enhetssprånget” (Heavisides funktion).

c. Hur stor andel av signalens energi går förlorad vid filtreringen? Ge en formel för detta i det allmänna fallet och tillämpa den på det speciella fallet i b-uppgiften.

d. Verifiera att den andelen för stora L approximativt är $= \dfrac{1}{\pi^2 L}$ för fallet i b-uppgiften.

e. Vilken är den filtrerarde signalen för signalen i b-uppgiften? Svaret får innehålla integraler.

Svar till övningarna:

6.1. a. 2, b. e^{t}, c. e^{-t}, d. $2t$,

e. 1. f. t, g. $t^2 + \frac{1}{12}$,

h. $\begin{cases} 1, & \text{om } t > 1/2, \\ t + 1/2, & \text{om } |t| \le 1/2, \\ 0, & \text{om } t < -1/2, \end{cases}$ i. $1 - |t|$, om $|t| \le 1$, 0 annars,

j. $\left.\begin{cases} t & \text{om } t \ge 0, \\ 0, & \text{om } t < 0, \end{cases}\right\} = t \cdot \mathrm{u}(t)$, k. $(e^{1/2} - e^{-1/2})\, e^{-t}$,

l. e^{2t}, m. e^{jt}, n. $\cos t$, o. $\sin t$,

p. $\delta(t-2)$.

6.4 $x(t) * \cos(2\pi f t) = \mathrm{j}\, X(f) \cdot \sin(2\pi f t)$ och $x(t) * \sin(2\pi f t) = -\mathrm{j}\, X(f) \cdot \cos(2\pi f t)$.
(Obs att $x(t)$ är udda och reellvärd (om och) endast om $X(f)$ är (udda och) imaginär, d.v.s. har realdel = 0.)

6.5. $1 - |f|$, om $|f| \le 1$, 0 annars.

6.7 a. $\frac{1}{6} e^{-|t|} - \frac{1}{12} e^{-2|t|}$, b. $-\frac{1}{6} e^{-|t|} + \frac{1}{3} e^{-2|t|}$, c. $-\operatorname{sign} t \left(\frac{1}{6} e^{-|t|} - \frac{1}{6} e^{-2|t|} \right)$,

d. $-\frac{1}{18} \operatorname{sign} t + \frac{1}{18} e^{-3|t|}$, e. $\delta(t) - \frac{3}{2} e^{-3|t|}$.

6.8 a. $X_L(f) = X(f) \cdot \mathrm{rect}_{2L}(f)$.

b. $X_L(f) = \frac{1}{1 + 2\pi \mathrm{j} f} \cdot \mathrm{rect}_{2L}(f)$.

c. $1 - \dfrac{\int_{-L}^{L} |X(f)|^2\, df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df}$ respektive $1 - \frac{2}{\pi} \arctan 2\pi L = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{2\pi L}$.

d. Använd t.ex. MacLaurinutvecklingen: $\arctan s = s + O(s^3)$. Sätt $s = \frac{1}{2\pi L}$ i denna.

e. $x_L(t) = x(t) * \{2L \operatorname{sinc}(2Lt)\} = 2L \int_0^{\infty} e^{-\tau} \operatorname{sinc} 2L(t-\tau)\, d\tau = 2L \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \operatorname{sinc} 2L\tau\, d\tau =$

$= 2L\, e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \operatorname{sinc} 2L\tau\, d\tau$.