9. Diskreta fouriertransformen (DFT)

9.1 Periodicitet ↔ pulståg

Av §6.3(i), arb.matr.4, sid 50, framgick att fouriertransformen (FT) av en funktion $x(t)$ är ett pulståg $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta(t-k/P)$ med pulsavstånd $1/P$ om och endast om $x(t)$ är P-periodisk. Koefficienterna $X[k]$ är identiska med fourierseriekoefficienterna för $x(t)$, d.v.s. $X[k] = \frac{1}{P}\int_P x(t)\,e^{-2\pi jkt/P}\,dt$.

Repetitionsvis: Det påstådda är en konsekvens av följande fakta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nP) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\underset{\mathcal{FT}}{\rightleftarrows}} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(Pf-k) = \frac{1}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k/P) \qquad \text{(§6.3(e), s.46)}$$

$$x(t)\cdot y(t) \quad \overset{\mathcal{FT}}{\underset{\mathcal{FT}}{\rightleftarrows}} \quad X(f) * Y(f) \qquad \text{(Faltningssatsen, §6.3(h))}$$

och att egenskapen ”att vara P-periodisk” är ekvivalent med att $x(t)$ är identisk med den P-periodiska fortsättningen av funktionen: $x_0(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } |t| < P/2, \\ 0, & \text{om } |t| > P/2: \end{cases}$

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodisk} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nP). \tag{46}$$

Fouriertransformering av ekvationen (46) ger då den ekvivalenta likheten

$$X(f) = X_0(f)\cdot \frac{1}{P}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k/P) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{P} X_0(k/P)\,\delta(f-k/P) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta(t-k/P),$$

där $$X[k] = \frac{1}{P}X_0(k/P) = \frac{1}{P}\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)\,e^{-2\pi jkt/P}\,dt = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} x(t)\,e^{-2\pi jkt/P}\,dt,$$

vilket är påståendet i första stycket ovan. ♦

Vi har alltså följande fundamentala fakta:

Sats 9.1

$x(t)$ är P-periodisk $\Leftrightarrow$ $X(f)$ ett pulståg med pulsavstånd $1/P$

och dualt (§6.3(a)),

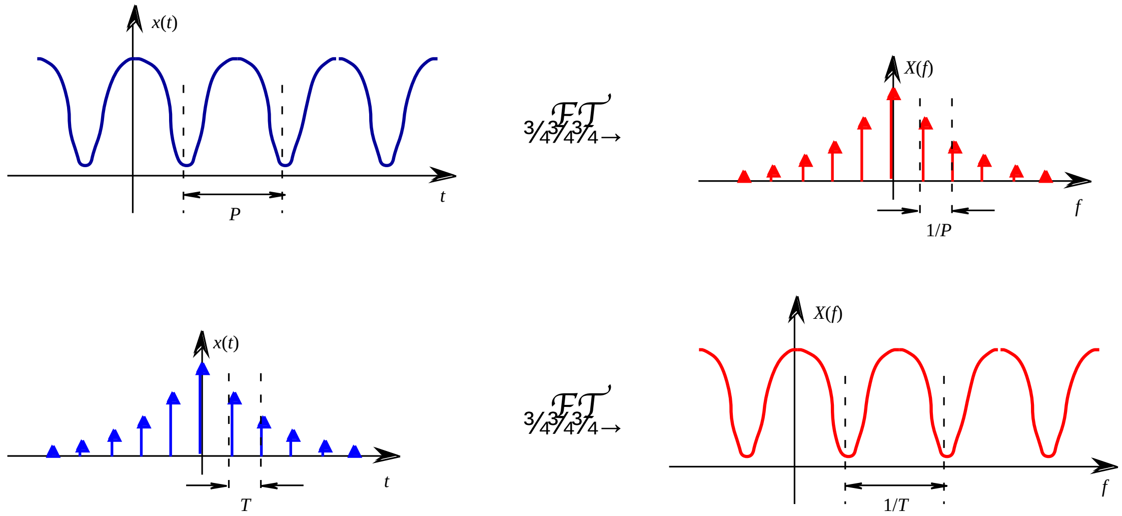
$x(t)$ ett pulståg med pulsavstånd T $\Leftrightarrow$ $X(f)$ är $1/T$-periodisk.

Dessutom :

Pulstågskoefficienterna erhålls ur

$$X[k] = \frac{1}{P}\oint_P x(t)\, e^{-2\pi j kt/P}\, dt \quad \text{i förstnämnda fallet}$$

$$x[n] = T\oint_{1/T} X(f)\, e^{2\pi j nfT}\, df \quad \text{i det duala fallet.}$$



9.2 Periodiska pulståg – den diskreta fouriertransformen. (OW §3.6-3.7, Hj §3.3, 4 och 6)
Anta $x(t)$ är både periodisk (med period P) och ett pulståg (med pulsavstånd T), d.v.s

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\delta(t - nT) \text{ och } x(t) = x(t - P). \tag{46}$$

För att detta skall gå ihop måste P vara ett helt antal pulsavstånd T, d.v.s.

$$P = NT \text{ och } x[n - N] = x[n],$$

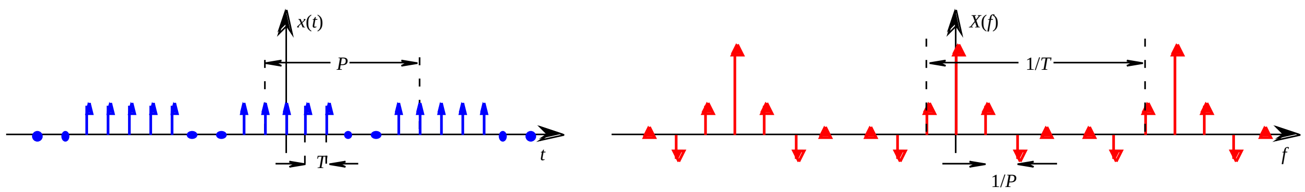
vilket innebär att följden av koefficienter är känd om man känner N st av dem i rad, t.ex

$$x[n], n = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Enligt föregående avsnitt måste också $x(t)$:s fouriertransform $X(f)$ vara ett periodiskt pulståg, men då med perioden $1/T$ och pulsavståndet $1/P$. Den har alltså formen

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta(f - k/P). \tag{47}$$

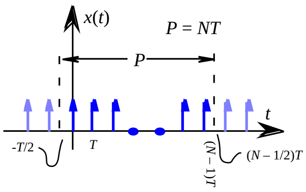
Antalet pulser/period är $(1/T)/(1/P) = P/T$, d.v.s likaledes N, varför $X[k - N] = X[k]$.



De *ändliga* talföljderna $x[n], n = 0, 1, \ldots, N - 1$ eller $X[k], k = 0, 1, \ldots, N - 1$ tillsammans med parametern T (eller alternativt P) innehåller tydligen all information om funktionen $x(t)$ och dess fouriertransform $X(f)$. Det är därför intressant att reda ut vilket explicit samband man har dem emellan:

Enligt sats 8.1 ovan har vi, eftersom $x(t)$ är P-periodisk, att följden $X[k]$ är x:s fourierseriekoefficienter

$$X[k] = \frac{1}{P} \oint_P x(t)\, e^{-2\pi j k t/P}\, dt,$$



Väljer vi som integrationsintervall $-\frac{1}{2}T < t < \left(N - \frac{1}{2}\right)T$ (obs att detta har längden P – se figuren här bredvid) så kommer endast pulserna i 0, T, $2T$, … , $(N-1)T$ att ligga i intervallets inre. Detta innebär att

$$X[k] = \frac{1}{P} \sum_{n=0}^{N-1} \oint_{-T/2}^{NT-T/2} x[n]\, \delta(t - nT)\, e^{-2\pi j k t/P}\, dt = \frac{1}{P} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi j k n/N}, \tag{48}$$

där exponenten i högra ledet har förenklats genom att $T/P = 1/N$.
Dualt får man på samma sätt för den $1/T$-periodiska funktionen $X(f)$ att

$$x[n] = T \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{2\pi j k n/N} = \frac{P}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{2\pi j k n/N}, \tag{49}$$

Paret av transformer (48) och (49) kallas den *diskreta fouriertransformen* (DFT). Relationen (48) tranformerar det *ändliga* följden av tal $x[n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, till talföljden $X[k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ med lika många element och (49) ger den omvända transformationen. ♦

Resonemanget ovan har (för givet N) en frihetsgrad – parametern P. I litteraturen förekommer tyvärr olika definitioner av denna transform i och med att man inte har enats om hur parametern skall väljas. I Hj sätts $P = 1$ (d.v.s perioden på x-sidan tas till 1) medan OW väljer $P = N$ (d.v.s pulsavståndet på x-sidan sätts till 1). Även valet $P = \sqrt{N} = 1/T$ förekommer i annan litteratur.

Alltså

Definition av DFT (i Hj)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi j k n/N}, \qquad \text{(Analysekv}_{\text{Hj}}\text{)} \tag{50}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{2\pi j k n/N}, \qquad \text{(Syntesekv}_{\text{Hj}}\text{)} \tag{51}$$

och enligt OW, som dessutom använder skrivsättet a_k i stället för $X[k]$;

Definition av DFT (i OW)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi j k n/N}, \qquad \text{(Analysekv}_{\text{OW}}\text{)} \tag{52}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{2\pi j k n/N}, \qquad \text{(Syntesekv}_{\text{OW}}\text{)} \tag{53}$$

DFTransformens stora betydelse ligger i, att den kan beräknas med ett ändligt antal räkneoperationer. De andra tre fouriertransformerna (FT, FS och TDFT) kräver alla att man beräkningar oändliga serier eller integraler, något som i praktiken ofta bara kan göras approximativt. Dessutom har man för inte så länge sedan (Cooley och Tukey, 1965) konstruerat en beräkningsalgoritm – Fast-Fourier-Transform – för DFT:n som gör det möjligt att nedbringa antalet nödvändiga räkneoperationer avsevärt.[1]

Se OW, sid 214 – 221 för beräkningsexempel

Eftersom DFT kan ses som ett specialfall av de andra tre transformerna[2] så ”ärver” också DFT:n de generella egenskaperna från dessa. Se OW §3.7, tabellen sid 221, och Hjalmarsson §3.4 där dessa listas.

Anmärkning: DFT-transformen kan också ses som en avbildning från vektorer

$$\boldsymbol{x} = (x[0], x[1], \ldots, x[N-1])$$

i rummet $\mathbf{C}^N$ till vektorer

$$\boldsymbol{X} = (X[0], X[1], \ldots, X[N-1]),$$

likaledes i $\mathbf{C}^N$. Eftersom transformationen är linjär så beskriver analys- och syntesekvationerna var sin linjära avbildning $\mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$ och som sådana motsvaras de av varsin matris. Noterar man att alla koefficienterna i transformationssambanden är heltalspotenser av den N:te enhetsroten $w = e^{2\pi j/N}$, så kan analysekvationen (50) skrivas:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x},$$

där

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & w^{-1} & \ldots & w^{-n} & \ldots & w^{-(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & w^{-k} & \ldots & w^{-kn} & \ldots & w^{-k(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & w^{-(N-1)} & \ldots & w^{-(N-1)n} & \ldots & w^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Syntesekvationens (51) får med detta formelspråk utseendet

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\,\boldsymbol{G}\boldsymbol{X},$$

1 Använder man transformationssambanden rätt upp och ner, så behöver man göra N st multiplikationer för varje koefficient, d.v.s. sammantaget N^2 multiplikationer. *Cooley* och *Tukey* utnyttjade en omskrivning av transformationssambanden, som för det fall att $N = N_1 \cdot N_2$, gör det möjligt att komma undan med $N \cdot (N_1 + N_2)$ multiplikationer. Bäst fungerar algoritmen om N är en 2-potens. Antalet multiplikationer blir då (högst) $2N \log_2 N$. För $N = 1024 = 2^{10}$ exempelvis, kräver en ”rakt-upp-och-ner”-beräkning i allmänhet fler än 10^6 multiplikationer, medan FFT behöver högst $2 \cdot 1024 \cdot 10 \approx 2 \cdot 10^4$ – en besparing på närmare 98%! (Se också Hj §3.6.)

Den Cooley-Tukeyska omskrivningen är dock inte ”ny”, den utnyttjades redan under 1800-talets första hälft i andra, men besläktade sammanhang av *Gauss*.

2 DFT är ett specialfall av FS (som operarar på periodiska funktioner i allmänhet) – nämligen det som rör koefficienterna till periodiska *pulståg*. DFT är också ett specialfall av TDFT (som opererar på talföljder i allmänhet) – nämligen det som rör *periodiska* talföljder.

där $$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^n & \dots & w^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^k & \dots & w^{kn} & \dots & w^{k(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{(N-1)} & \dots & w^{(N-1)n} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Tydligen är dessa matriser symmetriska och, så när som på en konstant faktor, varandras inverser. Man ser också att den ena framgår ur den andra om alla elementen konjugeras[3]:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} = N\cdot \boldsymbol{E} \ (\boldsymbol{E} \text{ är enhetsmatris}) \tag{54}$$

$$\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{F}. \tag{55}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G} \quad \text{[4]} \tag{56}$$

Relationen (54) kan naturligtvis verifieras direkt, utan att man går omvägen över en allmän fouriertransformteori, genom att man utför multiplikationen av matriserna: Om rad k i $\boldsymbol{F}$ matrismultipliceras med kolonn m i $\boldsymbol{G}$ får man geometriska serier med kvoten w^{m-k} att summera:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w^{-kn} w^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} (w^{m-k})^n = \begin{cases} \dfrac{1-(w^{m-k})^N}{1-w^{m-k}} = 0 & \text{om } m \neq k, \\ N & \text{om } m = k. \end{cases}$$

Man har då använt att w är en N:te enhetsrot: $(w^{m-k})^N = (w^N)^{m-k} = 1$. ♦

Övningar: E 4.1 - 4.6.

---

3 Obs att w är ett tal på enhetscirkeln i det komplexa talplanet, så $w^{-1} = w^*$.

4 Relationer av denna typ kan ganska lätt hanteras i MatLab. Observera dock en egenhet i MatLab:s formelspråk: ”Transponering” betecknas .´(punkt + accent) medan symbolen ´ (enbart accent) är reserverad för ”transponering *och* konjugering”!