

10. Approximation av fouriertransformer (Hj kap 6)

10.1 Inledning

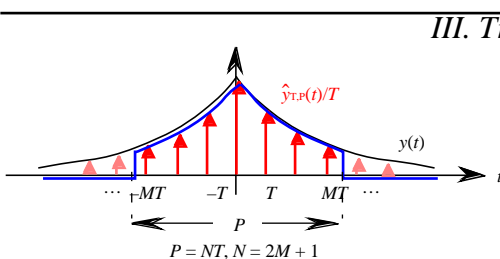
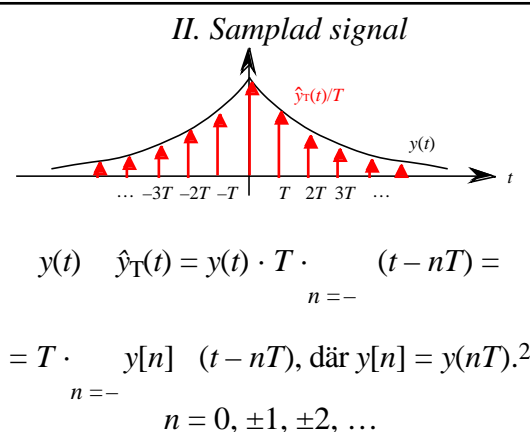
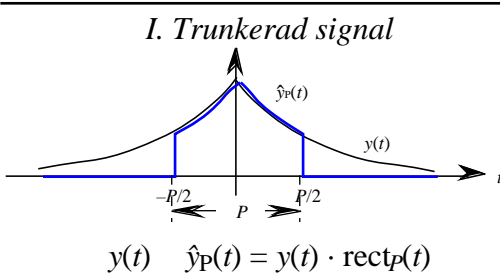
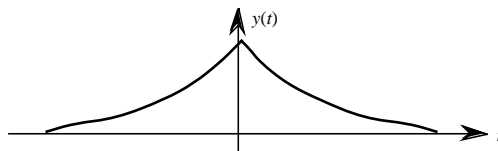
I en ideal tillvaro skulle fouriertransformen av en signal $y(t)$ som man vill studera kunna beräknas enligt sin definition:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

I realiteten är $y(t)$ nästan aldrig till fullo känd – dels kan man kanske inte iaktta signalen under hela sin varaktighet, dels detekteras signalen inte i kontinuerlig tid utan bara vid vissa sampeltidpunkter. Man behöver därför rent allmänt göra en analys hur dessa två inskränkningar (trunkering respektive sampling) påverkar möjligheterna att skaffa fram goda approximationer till $Y(f)$. Denna analys blir här i stor utsträckning heuristisk.

10.2 En översikt¹

Exakta signalen:



$y(t) \quad \hat{y}_{T,P}(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M \delta(t - nT) =$
 $= T \cdot \sum_{n=-M}^M y[n] \delta(t - nT), \text{ där } y[n] = y(nT),$
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M.$

¹ *Anmärkning* angående beteckningarna: Här följs (de underförstådda) beteckningskonventionerna i Hj. Om någon signal (något spektrum) är en approximation (inte nödvändigtvis "bra" sådan) till en signal (ett spektrum) markeras detta genom att en hatt, $\hat{\cdot}$, sätts på funktionssymbolen för den exakta signalen (spektrat). Approximationer där felet härrör från en trunkering förses med index p , medan sådana som från samplingar med index T . Approximationer som härrör från både trunkering och sampling dubbelindicerars, T,P . Ex.vis: $\hat{y}_T(t)$ resp. $\hat{y}_{T,P}(t)$ är båda approximationer till $y(t)$ – i det första fallet härrör felet från en sampling enbart, i det andra från sampling och trukering.

² För en motivering för faktorn T , se sid 54 i arb.matr 5.

För att kunna få en uppfattning om hur "felaktigheterna" i approximationerna ovan fortplantas till motsvarande fouriertransformer, kan det vara nyttigt att hålla följande fakta i minnet:

$$\begin{array}{ll}
 x(t) \cdot y(t) & \mathcal{FT} \quad X(f) * Y(f), \\
 x(t) * y(t) & \mathcal{FT} \quad X(f) \cdot Y(f), \\
 (t-a) & \mathcal{FT} \quad e^{-2\pi jaf} \\
 T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t-nT) & \mathcal{FT} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f-n/T), \\
 \text{rect}_P(t) & \mathcal{FT} \quad P \text{ sinc } Pf.
 \end{array}$$

10.2 Fall I. Fel från trunkering (Hj §6.4)

Man har $\hat{y}_P(f) = y(f) \cdot \text{rect}_P(f) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \hat{Y}_P(f) = Y(f) * P \text{ sinc } Pf$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f-\xi) P \text{ sinc } P\xi d\xi \quad .^3$$

En heuristisk tolkning av uttrycket för transformen kan se ut så här: Nyssnämnda faltning kan ses som att man ersätter $Y(f)$ med ett glidande medelvärde där funktionen $P \text{ sinc } P(\cdot)$ anger vilken "vikt" man ger det funktionsvärde i punkten som ligger enheter ifrån f .⁴ Eftersom $P \text{ sinc } P(\cdot)$ för stora P väsentligen är 0 bara i närheten av $\xi = 0$, så kommer man då att bilda ett slags mycket "lokala" medelvärden – grafen för $\hat{Y}_P(f)$ blir en "blurrad" variant av grafen för $Y(f)$.

Man har vidare att

$$\hat{Y}_P(f) = \int_{-P/2}^{P/2} y(t) \cdot \text{rect}_P(t) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-P/2}^{P/2} y(t) e^{-2\pi jft} dt,$$

vilket kombinerat med det faktum att $\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} y(t) e^{-2\pi jkt/P} dt = Y_k$ är den k :te fourierseriekoefficienten

för funktionen $y(t)$, $-P/2 < t < P/2$, ger att

$$\hat{Y}_P(k/P) = P \int_{-P/2}^{P/2} y(t) e^{-2\pi jkt/P} dt = P X_k$$

Om P är ett "stort" tal så bör i sampelpunkterna k/P , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, på frekvensaxeln gälla⁵

$$Y(k/P) \approx \hat{Y}_P(k/P) = P X_k$$

³ Funktionen $P \text{ sinc } Pf$ kallas $d_P(f)$ i Hj. Se t.ex Hj sid 88 för grafernas utseende. Se också arb.matr 4, sid 39.

⁴ Obs att vi vet att $\int_{-\infty}^{\infty} P \text{ sinc } P\xi d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } \xi d\xi = 1$.

⁵ Hj sid 96.

På grund av ovannämnda medelvärdesbildning kan felen förväntas bli större i punkter där $X(f)$ varierar kraftigt än i punkter där $X(f)$ är relativt konstant.

Eftersom $1/P$ är ett mått på bredden hos huvudloben hos viktsfunktionen – dess nollställen närmast origo är $\pm 1/P$ (se också fig i t.ex Hj sid 38) – kan man via den parametern få en uppfattning om hur nära två frekvenstoppar kan få ligga för att de efter medelvärdesförfarandet fortfarande skall gå att ”känna igen”. Storheten $1/P$ tas som mått på *frekvensupplösningen*. (Se Hj §6.2.4 och särskilt figurerna 6.3 och 6.5.)

10.3 Fall II. Fel från sampling (Hj §6.5)

$$\begin{aligned} \text{Här har vi } \hat{y}_T(t) &= y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) & \xrightarrow{\mathcal{FT}} & \hat{Y}_T(f) = Y(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \\ & & & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - n/T) \quad (\text{Poissons formel}) \end{aligned}$$

Detta betyder att $\hat{Y}_T(f)$ exakt är den $1/T$ -periodiska fortsättningen till $Y(f)$. Detta fall behandlades i arb.matr 5. För bandbegränsade signaler (där alltså $Y(f) = 0$ utanför något ändligt intervall) kan man för tillräckligt stora värden på $1/T$ ($2 \times$ bandbredden = Nyquistfrekvensen) exakt rekonstruera $Y(f)$ ur

summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(f - n/T)$ – man har att $Y(f) = \hat{Y}_T(f)$ för f inom bandet. Detta preciseras i samplingssatsen (Arb.matr 5, sid 56, Hj sid 183, OW sid 518).

För signaler som inte är bandbegränsade, men där spektret avtar ”snabbt” mot 0 då $f \rightarrow \pm \infty$, så har man istället att $Y(f) \approx \hat{Y}_T(f)$, för ”måttliga” f .

De felaktigheter man får då, härör från termerna $Y(f - n/T)$, $n \neq 0$, i summan. Man kan alltså för ett visst f -värde utifrån enbart $\hat{Y}_T(f)$ inte skilja på $Y(f)$:s värden i de olika frekvenserna $f - n/T$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Detta är den s.k. *alias-effekten*. Denna blir – återigen förutsatt att $Y(f)$ avklingar ”snabbt” mot 0 – mindre uttalad ju mindre sampelavståndet är.

Man har också

$$\hat{y}_T(t) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \delta(t - nT) \quad \xrightarrow{\mathcal{FT}} \quad \hat{Y}_T(f) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-jnTf} = T \cdot Y_d(Tf),$$

där $Y_d(\cdot)$ är TDFT:n för följderna av sampelvärden $y[n]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Alltså: För ”snabbt” avklingande $Y(f)$ är $Y(f) \approx T \cdot Y_d(Tf)$

Approximationen kan förväntas vara god om $1/T > 2B$, där B är en frekvens över vilken $Y(f)$ är försumbar.

Antivikningsfilter: (Hj 8.6, sid 114) Ett sätt att förminska felet från samplingen är att låta den föregås av en så kallad *antivikningsfiltrering*. Ett idealt antivikningsfilter tar in en analog signal $y(t)$ och filtrerar bort alla dess frekvensbidrag utöver en viss nivå, $|f| > B$, medan bidragen från lägre frekvenser inte berörs, (*lågpassfiltrering*). För utsignalen $y_a(t)$ från filtret är alltså $Y_a(f) = Y(f)$, då $|f| < B$, medan $Y_a(f) = 0$, då $|f| > B$,

Samplas den på detta vis bandbegränsade signalen $y_a(t)$ med ett sampelintervall $T < \frac{1}{2B}$, så kan, enligt samplingssatsen, $y_a(t)$ och därmed $Y_a(f)$, exakt rekonstrueras ur sampelvärdena. På köpet får man exakta värden för $Y(f)$, för frekvenserna i intervallet $|f| < B$.

För illustrationer se Hj sid 116-7.

10.4 Fall III. Fel från trunkering och sampling (Hj §6.2-3)

Den approximation till $y(t)$ man i detta fall arbetar med är

$$y(t) \quad \hat{y}_{T,P}(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M (t-nT), \text{ där } P = (2M+1)T = NT.$$

Här gäller det alltså att studera fouriertransformen till den ändliga summan $T \cdot \sum_{n=-M}^M (t-nT) = s_{T,P}(t)$.

Fouriertransformering ger

$$s_{T,P}(t) \quad \mathcal{FT} \quad S_{T,P}(f) = T \sum_{n=-M}^M e^{-2jnTf},$$

Denna geometriska serie kan summeras (se arb.matr 3 sid 20-1) och man får

$$S_{T,P}(f) = T \frac{\sin Pf}{\sin Tf} = T \frac{\sin NTf}{\sin Tf} = T S_{1,P}(f)$$

För grafer se arb.matr 3, sid 20, Hj sid 70 o. 83.

Observera också att $s_{T,P}(t)$ är det pulståg som man får om $T \cdot \sum_{n=-M}^M (t-nT)$ trunkeras vid $\pm P/2$, d.v.s

$$s_{T,P}(t) = \text{rect}_P(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M (t-nT).$$

Av detta får man efter transformering den exakta likheten:

$$S_{T,P}(f) = P \text{sinc } Pf * \sum_{n=-M}^M (f-n/T)$$

Faltningssatsen ger nu $\hat{y}_{T,P}(t) \quad \mathcal{FT} \quad \hat{Y}_{T,P}(f) = Y(f) * S_{T,P}(f) = Y(f) * P \text{sinc } Pf * \sum_{n=-M}^M (f-n/T)$.

$\hat{Y}_{T,P}(f)$ åstadkoms alltså utifrån $Y(f)$ genom en medelvärdesbildning (faltningen med $P \text{sinc } Pf$) åtföljd

av en $1/T$ -periodisk fortsättning (faltningen med $\sum_{n=-M}^M (f-n/T)$) eller vice versa. (Jmfr Hj 6.2.3-4).

Också här är $1/P$ ett mått på frekvensupplösningen och aliaseffekten försumbar om $1/T > 2B$, där B är en frekvens över vilken $Y(f)$ är försumbar.

Vi har vidare att

$$\hat{y}_{T,P}(t) = y(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M (t-nT) = T \cdot \sum_{n=-M}^M y[n] (t-nT) \quad \mathcal{FT} \quad \hat{Y}_{T,P}(f) = T \cdot \sum_{n=-M}^M y[n] e^{-2jnTf},$$

Jämför man detta med definitionen⁶ för DFT:n för den ändliga följd $y[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$,

$$Y[k] = \sum_{n=-M}^M y[n] e^{-2jnk/N}, \quad N = 2M + 1,$$

så avläser man att för tillräckligt stora P och små T bör i sampelpunkterna k/P på frekvensaxeln gälla

$$\boxed{Y(k/P) \quad \hat{Y}_{T,P}(k/P) = T Y[k].} \quad (*)$$

Detta leder till ett tänkbart förfarande för att beräkna fouriertransformer till analoga signal (= signaler definierad på \mathbf{R}): Efter att ha valt P och T och avläst en följd av N st sampelvärden enligt principerna ovan, bestäms DFT:n för denna följd – lämpligen med FFT-algoritmen (eller en datorprogramvara som använder den). Sambandet (*) ger sedan approximativa värden för $Y(f)$ i punkterna $f = k/P, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M (= (N-1)/2)$.

Övningar: Ex 7.1 - 5.

⁶ Hj:s variant.

11. Om pulsamplitudmodulering (PAM)

(Hj 8.4-5, OW 7.1.2, 7.2)

11.1 Inledning

Vänsterledet i samplingsatsen (sid 56 i arb.matr 5):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} \frac{t-nT}{T} \tag{57}$$

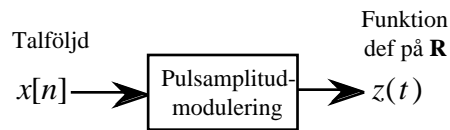
konstruerar tydligen en funktion $\hat{x}(t)$, definierad i \mathbf{R} utifrån talföljden $x(nT) = x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Det samplingsatsen utsäger är, att $\hat{x}(t) = x(t)$ under förutsättning att $x(t)$ är bandbegränsad med en bandbredd $\frac{1}{2T}$. Beräkningsproceduren (57) kan ses som ett rekonstruktionsförfarande – utifrån sampelvärdena i punkterna $t = nT$ beräknar man funktionsvärden för t -värden mellan dessa punkter. Händelsevis får man de exakta $x(t)$:värdena under nyssnämnda förutsättningar.⁷ När de inte är uppfyllda så är $\hat{x}(t)$ i stället en mer eller mindre bra approximation till $x(t)$.

Proceduren (57) kan också ses som en slags ”D/A-omvandlare” – en sådan tar emot en digital signal och ger ifrån sig en analog signal (= signal definierad på \mathbf{R}). Samtidigt är (57) ett exempel på ett generellare förfarande som kallas *pulsamplitudmodulering*, förkortat PAM.

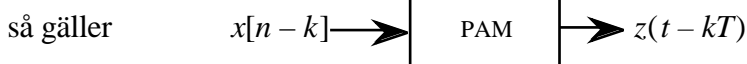
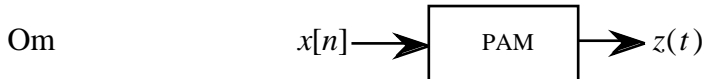
En pulsamplitudmodulering karakteriseras av följande egenskaper:

- 1° Utgående från en talföljd beräknas (produceras) en funktion definierad på \mathbf{R} .



(En tolkning: Proceduren är en D/A-omvandling)

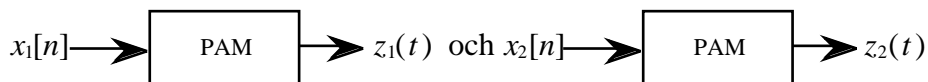
- 2° (Tidsinvarians)



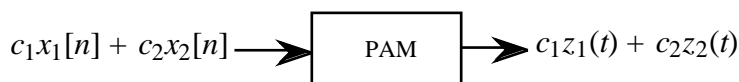
(En tolkning: Om $x[n]$ härrör från en sampling med sampelavstånd T av en analog signal och sampelpunkterna förskjuts kT enheter i tiden, så kommer den producerade analoga signalen likaledes att förskjutas kT enheter i t -led.)

- 3° (Linearitet)

Om man med samma PAM-procedur har

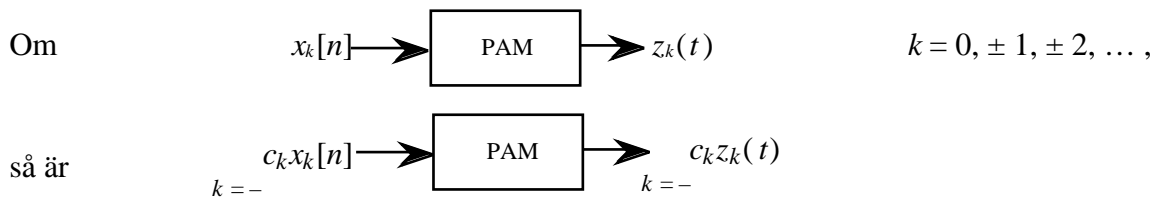


och $c_k, k = 1, 2$, är konstanter, så gäller också att

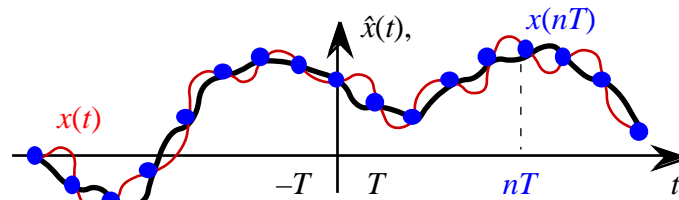


och denna princip skall också gälla för konvergenta oändliga linära kombinationer:

⁷ Se också figur 7.10, sid 524 i OW.



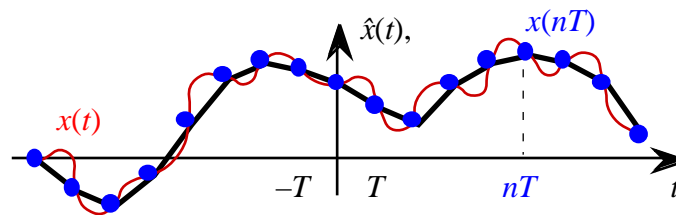
Andra exempel på PAM än det inledningsvis nämnda är rekonstruktionsförfaranden då man på annat sätt än som i (57) interpolerar mellan sampelpunkterna $(nT, x(nT))$ på grafen $(t, x(t))$ till en analog signal $\hat{x}(t)$:



$x(t)$:s graf är ritad som en smal kurva, rekonstruktionens graf är den fetare.

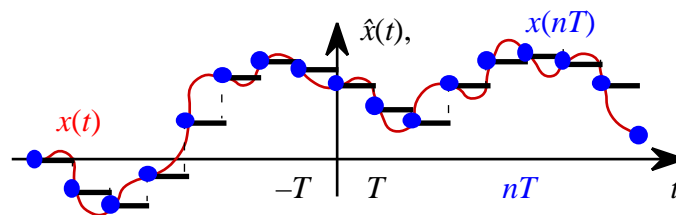
Exempel 11.1 (Linjär interpolering, "first-order hold", Hj sid 106, OW7.2, sid 522-7)

Grafen för $\hat{x}(t)$ är den man får om "grannpunkterna" $(nT, x[n])$ och $((n + 1)T, x[n + 1])$ förbinds med ett linjestycke:



Exempel 11.2 (Fasthållning, "zero-order hold", Hj sid 108, OW7.1.2, sid 520-2)

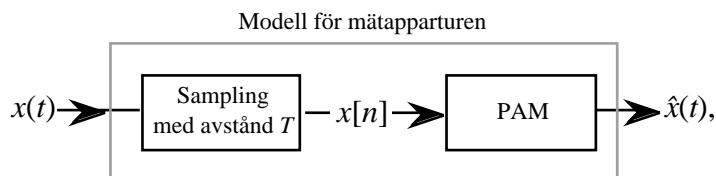
Grafen för $\hat{x}(t)$ är sträckvis kontant, $= x[n]$ i intervallet $nT \leq t < (n + 1)T$.



Begreppet PAM kan också med fördel användas för att göra matematiska modeller för faktiska instrument som avläser inkommande signaler. Instrument som just bara samplar – d.v.s producerar signalen

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

utifrån signalen $x(t)$ – går knappast att realisera. Däremot kan man ofta uppfatta utsignalen $\hat{x}(t)$ från mätapparaturen som en bearbetning av sampelvärdena med en PAM-procedur karakteristisk för apparaturen ifråga:



(58)

Övning:

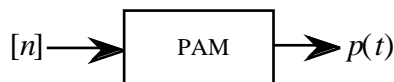
11.1 Kontrollera att principerna 1° – 3° ovan är uppfyllda för procedurerna i ex. 10.1-2.

11.2 Allmänt om PAM

Mängden av olika tänkbara PAM:ar är förhållandevis lätt att överblicka: Observera nämligen att varje talföljd $x[n]$ kan skrivas

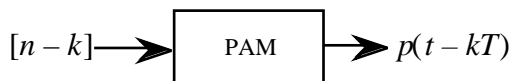
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k],$$

där $\delta[n]$ är "enhetspulsen" $\begin{cases} 1, & \text{om } n = 0, \\ 0, & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$ Kallar man "pulssvaret", d.v.s. PAM:en av $\delta[n]$ för $p(t)$,

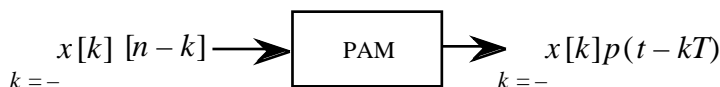


så leds man till följande⁸:

Enl 2°:



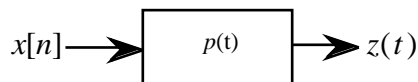
Enl 3°:



Slutsatsen blir att

<p>Om $x[n] \rightarrow$ $\rightarrow z(t)$</p> <p>så är $z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] p(t - kT),$ ⁽⁹⁾</p> <p>där $p(t)$ är pulssvaret till PAM:en.</p>	(59)
---	------

Omvänt ser man att varje beräkningsprocedur av typen (59) uppfyller villkoren 1°–3° och därför är en PAM. Symboliskt kan man rita:



Eftersom

$$p(t - kT) = p(t) * \delta(t - kT),$$

så kan (59) också skrivas

⁸ Beteckningen $p(t)$ för pulssvaret används i Hj. I OW skrivs $h(t)$ och $p(t)$ är där istället reserverat för pulståget $\delta(t - kT)$.

⁹ Likheten (59) tas i Hj som definition på begreppet PAM.

$$z(t) = x_s(t) * p(t), \tag{60}$$

där

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - kT)$$

är den mot x svarande sampelfunktionen.

Fouriertransformerar man likheten (60) får man enligt faltningssatsen och det faktum att FT av $(t - kT)$ är $e^{-2 jkfT}$ att

$$Z(f) = X_s(f) \cdot P(f),$$

där

$$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-2 jkfT} = X_d(fT)$$

och $X_d(\)$ är TDFT:n till följderna $x[n]$.

Sammanfattningsvis

Sats. (Hj sid 108)

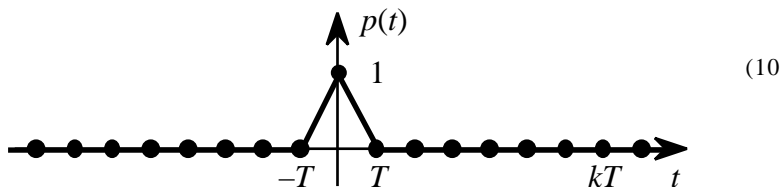
För pulsamplitudmodulering med pulssvaret $p(t)$, så gäller för den diskreta insignalen $x[n]$ och analoga utsignalen $z(t)$:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] p(t - kT),$$

$$Z(f) = X_d(fT) \cdot P(f),$$

Exempel 11.1 forts (Hj sid.106, OW7.2)

Vid linjär interpolation får man som graf för pulssvaret:



d.v.s

$$p(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & \text{då } |t| \leq T \\ 0, & \text{då } |t| > T. \end{cases}$$

Observerar man att $p(t) = \text{rect}(t/T) * \text{rect}(t/T)$, (Kontrollera detta som en övning!)

så får man fouriertransformen

$$P(f) = (T \text{sinc } Tf)^2 = \frac{\sin^2 Tf}{2f^2}.$$

Om nu $x[n]$ är sampelvärdena i punkterna $t = nT$ av en analog signal $x(t)$, så producerar denna PAM den linjära interpolationen till $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] p(t - kT).$$

Sambandet mellan fouriertransformerna (FT för $\hat{x}(t)$:s del och TDFT för $x[n]$:s del) är då:

$$\hat{X}(f) = X_d(fT) \cdot \frac{\sin^2 Tf}{2f^2}.$$

10 Linjär interpolation: Förbind ”grannpunkterna” med rätta linjestycken

Om en mätappartur enligt modellen (58) karakteriseras av denna PAM, så kommer exempelvis

$$X(f) = T X_d(fT) \text{ för } |f| < 1/T$$

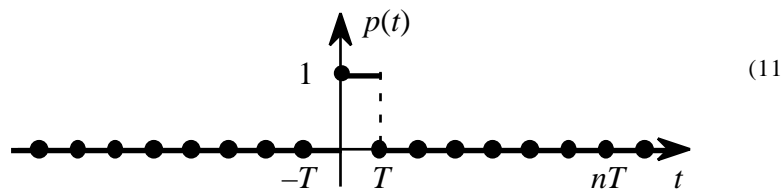
om signalen är bandbegränsad och $1/T = 2 \times$ bandbredden (samplingssatsen!). Sambandet mellan fouriertransformerna för (den för oss "kända") signalen $\hat{x}(t)$ och (den för oss inte så "kända") signalen $x(t)$ ges då av

$$X(f) = \hat{X}(f) \cdot \frac{2f^2 T}{\sin^2 Tf} \text{ för } |f| < 1/T \text{ och } = 0 \text{ om } |f| > 1/T.$$

Insignalen $x(t)$ kan alltså till fullo rekonstrueras i sådana fall.

Exempel 11.2 forts (Hj sid 108, OW 7.1.2)

Vid linjär interpolation får man som graf för pulssvaret:



d.v.s

$$p(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{då } t > T \text{ eller } T < 0. \end{cases}$$

Observerar man att

$$p(t) = \text{rect}_T(t - T/2),$$

så får man fouriertransformen $P(f) = (T \text{ sinc } Tf) e^{-jTf/2} = \frac{\sin Tf}{f} e^{-jTf/2}$.

Om nu $x[n]$ är sampelvärdena i punkterna $t = nT$ av en analog signal $x(t)$, så producerar denna PAM en sträckvis konstant approximation till $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] p(t - kT).$$

Sambandet mellan fouriertransformerna (FT för $\hat{x}(t)$:s del och TDFT för $x[n]$:s del) är då:

$$\hat{X}(f) = X_d(fT) \cdot \frac{\sin Tf}{f} e^{-jTf/2}.$$

Om en mätappartur enligt modellen (58) karakteriseras av denna PAM, så kommer exempelvis

$$X(f) = T X_d(fT) \text{ för } |f| < 1/T$$

om signalen är bandbegränsad och $1/T = 2 \times$ bandbredden. Sambandet mellan fouriertransformerna för (den för oss "kända") signalen $\hat{x}(t)$ och (den för oss inte så "kända") signalen $x(t)$ ges då av

$$X(f) = \hat{X}(f) \cdot \frac{fT e^{jTf/2}}{\sin Tf} \text{ för } |f| < 1/T \text{ och } = 0 \text{ om } |f| > 1/T.$$

Insignalen $x(t)$ kan alltså till fullo rekonstrueras också i detta fall.

Mera läsning: Hj §8.6 om rekonstruktionsfel och antivikningsfilter.

Övningar: Ex 8.8 – 14.

¹¹ Fasthållning: Dra ett horisontellt streck med längd T åt höger från varje punkt.