Lösningar till tentamen 5B1209/5B1215, "Signaler och system I", 031215

1a. Ekvationen är separabel. Efter separation får man:

$$-\frac{y'}{(y-1)^2} = 1 \text{ eller } y = 1.$$

Integration av de båda leden i det första sambandet ger $\dfrac{1}{y-1} = x + C$, d.v.s. $y = 1 + \dfrac{1}{x+C}$. Villkoret $y(2) = 2$ medför att $1 + \dfrac{1}{2+C} = 2$, dvs. att $C = -1$. Man får lösningen $y = 1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{x-1}$. Eftersom lösningsfunktionen saknar mening då $x = 1$ så är $x > 1$ det största intervall i vilket den är definierad.

$$\textbf{Svar: } y = \frac{x}{x-1}, x > 1.$$

1b. Ingen av lösningarna $y = 1 + \dfrac{1}{x+C}$ är definierade för alla reella x eftersom de saknar mening då $x = -C$. Däremot är konstantlösningen $y = 1$ definierad på hela $\mathbf{R}$.

$$\textbf{Svar: } y = 1.$$

2a. *Metod 1.* (Utveckling i konvergent geometrisk serie)
Sätt för formelförenklingens skull $\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu} = z$ och observera att $|z| = 1$. Analysekvationen för TDFT får då formen

$$X_{\mathrm{d}}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^n.$$

I detta fall är

$$X_{\mathrm{d}}(\nu) = \frac{z}{z-2} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}.$$

Det senare bråket är summan av en konvergent geometrisk serie, kvot $|z/2| = 1/2 < 1$:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

alltså

$$X_{\mathrm{d}}(\nu) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

Här avläser man **svaret:**

$$x[n] = \left\{ \begin{array}{lll} -2^{-n}, & \text{då} & n \geq 1, \\ 0, & \text{då} & n \leq 0. \end{array} \right\} = -2^{-n}\,\mathrm{u}[n-1].$$

Metod 2. (Användning av tabell)
Enligt tabell har man att

$$a^n\,\mathrm{u}[n] \stackrel{\text{TDFT}}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}} = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}, \ \underline{\underline{\text{om } |a| < 1.}}$$

Vidare gäller generellt att

$$x[n-k] \stackrel{\text{TDFT}}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}k\nu} X_{\mathrm{d}}(\nu) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}).$$

Den givna transformen kan skrivas

$$\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu} - 2} = -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}$$

och vi har enligt ovan

$$
\begin{aligned}
(\tfrac{1}{2})^n \,\mathrm{u}[n] &\overset{\text{TDFT}}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}},\\
(\tfrac{1}{2})^{n-1} \,\mathrm{u}[n-1] &\overset{\text{TDFT}}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}},\\
-(\tfrac{1}{2})^{n} \,\mathrm{u}[n-1] &\overset{\text{TDFT}}{\longrightarrow} -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu}}.
\end{aligned}
$$

$$\textbf{Svar:}\quad x[n] = -2^{-n}\,\mathrm{u}[n-1].$$

3a. Vi använder egenvärdesmetoden. Systemet på matrisform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-1-\lambda)+2 = \lambda^2+4\lambda+5 \Leftrightarrow \lambda = -2\pm \mathrm{i}.$

Egenvektorer: För ex.vis $\lambda = -2+\mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2v_1 + (1-\mathrm{i})v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning är alltså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \mathrm{e}^{-2t}\,(\cos t + \mathrm{i}\sin t).$$

Eftersom det givna systemet har reella koefficienter så måste också real- och imaginärdelarna till denna komplexa lösning satsifiera systemet. Man avläser

realdelen: $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right] \mathrm{e}^{-2t}$$

och imaginärdelen: $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t\right] \mathrm{e}^{-2t}.$$

Dessa båda är linjärt oberoende så systemets allmänna lösningen ges av de linjära kombinationerna av dem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.$$

$$\textbf{Svar}: \begin{cases} x_1(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + \sin t) + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}(\sin t - \cos t), \\ x_2(t) &= -2c_1\,\mathrm{e}^{-2t}\cos t - 2\mathrm{e}^{-2t}c_2\,\sin t. \end{cases}$$

3b. Den allmänna lösningen kan enligt 3a. skrivas:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\,(\cos t + \sin t) & \mathrm{e}^{-2t}\,(\sin t - \cos t) \\ -2\mathrm{e}^{-2t}\,\cos t & -2\mathrm{e}^{-2t}\,\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Villkoret $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ innebär att vi söker $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ så att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ d.v.s.}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ varav}$$

$$\textbf{Svar}: \begin{cases} x_1(t) &= \mathrm{e}^{-2t}(\cos t - 3\sin t), \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\,(2\cos t + 4\sin t). \end{cases}$$

4a. *Metod 1*: (Direkt beräkning)

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} t} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\omega)t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi+\omega)t})\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\omega)t}}{2\mathrm{j}(\pi-\omega)}\right]_{t=-1/2}^{t=1/2} + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi+\omega)t}}{2\mathrm{j}(\pi+\omega)}\right]_{t=-1/2}^{t=1/2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2-\omega/2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2-\omega/2)}}{2\mathrm{j}(\pi-\omega)} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2+\omega/2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\pi/2+\omega/2)}}{2\mathrm{j}(\pi+\omega)}$$

$$= \frac{\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega/2} - (-\mathrm{j})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega/2}}{2\mathrm{j}(\pi-\omega)} + \frac{\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega/2} - (-\mathrm{j})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega/2}}{2\mathrm{j}(\pi+\omega)} = \left(\frac{1}{\pi-\omega} + \frac{1}{\pi+\omega}\right)\cos\tfrac{\omega}{2}$$

$$= \frac{2\pi\cos\frac{\omega}{2}}{\pi^2-\omega^2} = \frac{2\cos\pi f}{\pi(1-4f^2)}.$$

Anmärkning: Denna kalkyl förutsatte att $\omega \neq \pm\pi$. För dessa ω-värden får man istället

$$X(\pm \mathrm{j}\pi) = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (\mathrm{e}^{\pi \mathrm{j} t} + \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} t})\,\mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (1 + \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{j} t})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(1+0) = \frac{1}{2}.$$

$$\textbf{Svar}: \frac{2\pi\cos\frac{\omega}{2}}{\pi^2-\omega^2} = \frac{2\cos\pi f}{\pi(1-4f^2)}, \text{ (om } \omega = 2\pi f \neq \pm\pi, = 1/2 \text{ om } \omega = 2\pi f = \pm\pi).$$

Metod 2: (Användning av tabell)

Obs att
$$x(t) = \cos\pi t\ \cdot \operatorname{rect} t.$$
Man har
$$\cos\pi t \xrightarrow{\text{FT}} \tfrac{1}{2}\,(\delta(f-\tfrac{1}{2}) + \delta(f+\tfrac{1}{2})),$$
$$\operatorname{rect} t \xrightarrow{\text{FT}} \operatorname{sinc} f = \frac{\sin\pi f}{\pi f} \text{ (om } f \neq 0, = 1 \text{ om } f = 0).$$
Faltningssatsen ger sedan:
$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} \tfrac{1}{2}\,(\delta(f-\tfrac{1}{2}) + \delta(f+\tfrac{1}{2})) * \operatorname{sinc} f,$$
vilket förenklas:
$$\tfrac{1}{2}\,(\delta(f-\tfrac{1}{2}) + \delta(f+\tfrac{1}{2})) * \frac{\sin\pi f}{\pi f} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\pi f - \frac{\pi}{2})}{f-\frac{1}{2}} - \frac{\sin(\pi f + \frac{\pi}{2})}{f+\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\,(-\cos\pi f)\left(\frac{1}{f-\frac{1}{2}} - \frac{1}{f+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\cos\pi f}{\pi(1-4f^2)} \text{ (om } f \neq \pm 1/2, = 1/2 \text{ om } f = \pm 1/2).$$

Metod 3: (Förenkling genom derivering)

Eftersom $x(t)$ är kontinuerlig (även för $t = \pm\frac{1}{2}$) så är

$$x'(t) = \begin{cases} -\pi \sin \pi t, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$$

Denna derivata har språngdiskontinuiteter i $t = \pm 1/2$ (språngstorleken är π i båda dessa punkter) och är för övrigt kontinuerlig. Man får

$$x''(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -\pi^2 \cos \pi t, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2, \end{array} \right\} + \pi\,\delta(t-1/2) + \pi\,\delta(t+1/2),$$

varav

$$x'' + \pi^2\, x = \pi\,\delta(t-1/2) + \pi\,\delta(t+1/2).$$

Fouriertransformeras denna likhet erhålls:

$$(-\omega^2 + \pi^2) X(\mathrm{j}\,\omega) = 2\pi\ \cos\tfrac{\omega}{2}.$$

Eftersom funktionen $X(\mathrm{j}\,\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t$ beror kontinuerligt av variabeln ω erhålls

$$X(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{2\pi\ \cos\frac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2}\ \left(\text{då } \omega \neq \pm\pi, = \lim_{\omega\to\pm\pi} \frac{2\pi\ \cos\frac{\omega}{2}}{\pi^2-\omega^2} = \frac{1}{2} \text{ då } \omega = \pm\pi\right).$$

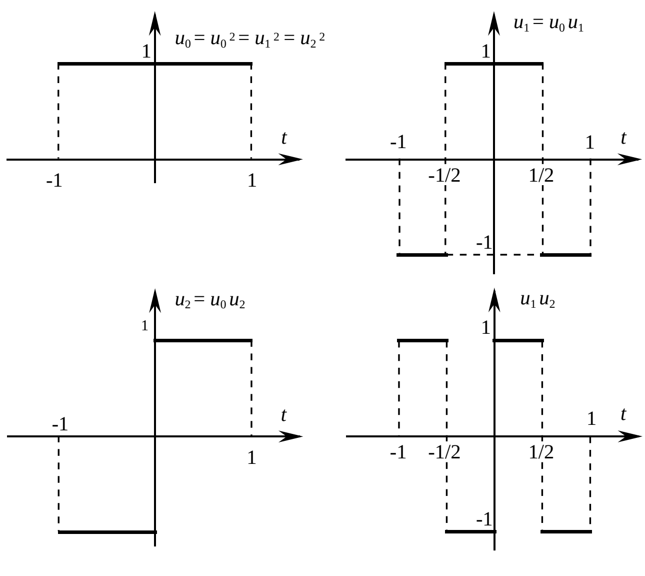
4b. Fourierseriekoefficienterna är enligt analysekvationen för FS,

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{j}kt/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi t\ \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{j}kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,X(\mathrm{j}\,\pi k)$$

$$= \lceil\text{Enl. resultatet i 4a.}\rceil = \frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{\pi(1-k^2)} \text{ om } k \neq \pm 1 \text{ och } = \frac{1}{4} \text{ om } k = \pm 1.$$

$$\textbf{Svar}:\ a_k = \frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{\pi(1-k^2)} \text{ om } k \neq \pm 1 \text{ och } a_{\pm 1} = \frac{1}{4}.$$

5a.



Ur graferna ovan framgår att:

$$\int_{-1}^{1} u_0(t)u_1(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} u_0(t)u_2(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} u_1(t)u_2(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Funktionerna är alltså parvis ortogonala. Eftersom $u_0^2 = u_1^2 = u_2^2 = 1$, så är

$$\|u_0\|^2 = \|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,\mathrm{d}t = 2.$$

$$\textbf{Svar}\text{: } \|u_0\| = \|u_1\| = \|u_2\| = \sqrt{2}.$$

5b. De sökta koefficienterna ges av

$$a_n = \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{-1}^{1} t^2 \cdot u_n(t)\mathrm{d}t, n = 0, 1, 2.$$

Man får

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} t^2 \cdot 1\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{1/2\le|t|\le1} t^2\cdot(-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{1}{4},$$

och, eftersom $u_0 \cdot u_2$ är en udda funktion samt integrationsintervallet är symmetriskt kring origo:

$$a_2 = 0.$$

För det minimala felet gäller, eftersom $(t^2 - v) \perp v$,

$$\|t^2 - v\|^2 = \|t^2\|^2 - \|v\|^2,$$

där $\|v\|^2 = \|u_0\|^2|a_0|^2 + \|u_1\|^2|a_1|^2 + \|u_2\|^2|a_2|^2 = 2(|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2)$, varav

$$\|t^2 - v\|^2 = \int_{-1}^{1} t^4\,\mathrm{d}t - 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + 0\right) = \frac{2}{5} - \frac{25}{72} = \frac{19}{360}.$$

$$\textbf{Svar}\text{: } a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = 0, \text{ kvadratiska medelfelet} = \frac{19}{360}.$$

6a. Sampelvärdena $x[n] = x(nT), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ utgör koefficienterna för δ-funktionerna i summan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT).$$

Pulsamplitudmoduleringen skapar ur sampelvärdena den tidskontinuerliga signalen

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)p(t - nT) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\right) * p(t),$$

där $p(t)$ är pulsfunktionen. Man har alltså

$$\hat{x}(t) = \left(x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)\right) * p(t).$$

Eftersom
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - n/T),$$

så ger faltningssaten och dess dual:

$$\hat{X}(f) = \left(X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) \right) \cdot P(f) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(f - n/T) \right) \cdot P(f).$$

Utsignalens transform är alltså produkten av den $\frac{1}{T}$-periodiska fortsättningen av $\frac{1}{T}\, X(f)$ och $P(f)$.

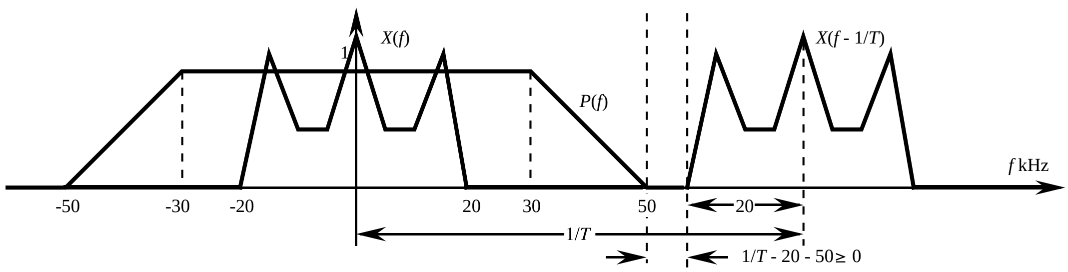
$$\textbf{Svar}: \hat{X}(f) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(f - n/T) \right) \cdot P(f).$$

6b. Vi har
$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\, X(f) \cdot P(f) + \left(\sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{1}{T} X(f - n/T) \right) \cdot P(f).$$

Eftersom $X(f) = 0$ då $|f| > 20\,\mathrm{kHz}$ och $P(f) = 1$ då $|f| < 30\,\mathrm{kHz}$ så kan detta förenklas till

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\, X(f) + \left(\sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{1}{T} X(f - n/T) \right) \cdot P(f).$$

Den eftersträvade proportionaliteten mellan $\hat{X}(f)$ och $X(f)$ råder om den sista termen $= 0$. Eftersom $P(f) = 0$ då $|f| \geq 50\,\mathrm{kHz}$ men $\neq 0$ då $|f| < 50\,\mathrm{kHz}$, så inträffar detta, se figuren nedan, om och endast om $\frac{1}{T} - 20 \geq 50\,\mathrm{kHz}$, d.v.s. om och endast om $T \leq \frac{1}{70}$ msek.



$$\textbf{Svar}: \frac{1}{70}\,\text{msek} \approx 14,3\,10^{-6}\,\text{sek}.$$