Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, Signaler och system I, för ME och E2
(5B1215/5B1209)
den 15 december 2003 kl $14^{00} - 19^{00}$.

Hjälpmedel:
Zill-Cullen: Differential Equations with Boundary-Value Problems, Oppenheim-Willsky: Signals and Systems, Hjalmarsson: Kompletterande kursmaterial i signaler och system, BETA Mathematics Handbook, Formelsamling i Signalbehandling. Räknedosa utan program.
Fordringar: 24p, 32p respektive 40p räcker för betygen 3, 4 respektive 5.

1. a. Bestäm funktionen $y(x)$ så att den uppfyller differentialekvationen

$$y' = -(y-1)^2 \qquad \text{[ekv1]}$$

och begynnelsevillkoret $y(2) = 2$. Ange också det maximala intervall inom vilket den lösningen är definierad. (5p)

b. Har [ekv1] någon eller några lösningar som är definierade för *alla* reella x? Ange den eller dem i så fall. (3p)

2. Bestäm den tidsdiskreta signalen $x[n], n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, då man vet att dess tidsdiskreta fouriertransform är

$$X_\mathrm{d}(\nu) = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\,\nu}}{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\,\nu} - 2},$$

där $\nu = \omega/(2\pi)$ är den normerade frekvensen. (8p)

3. a. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t), \end{cases}$$

på reell form. (6p)

b. Bestäm den lösning till systemet för vilken $x_1(0) = 1,$ och $x_2(0) = 2$. (2p)

4. En signal ges av

$$x(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{för övriga } t\text{-värden.} \end{cases}$$

a. Bestäm signalens fouriertransform. (6p)

b. Bestäm – gärna med ledning av svaret i a. – de komplexa fourierseriekoefficienterna $a_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, till signalens 2-periodiska fortsättningen,

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - 2n).$$

Ange speciellt koefficienterna a_1 och a_{-1}. (4p)

Var god vänd!

5. Låt

$$u_0(t) = 1, u_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{om} \quad |t| \le \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{om} \quad \frac{1}{2} < |t| \le 1, \end{cases} \quad \text{och } u_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{om} \quad 0 \le t \le 1, \\ -1, & \text{om} \quad -1 \le t < 0. \end{cases}$$

a. Verifiera att dessa tre funktioner är parvis ortogonala på intervallet $|t| \le 1$ med avseende på skalärprodukten

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Bestäm också deras normer. (3p)

b. Bestäm konstanterna a_0, a_1 och a_2 så att

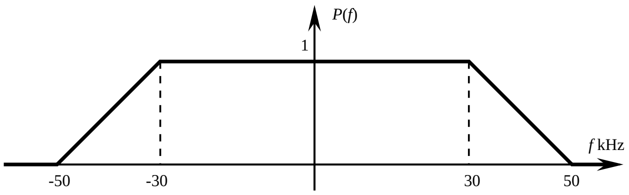
$$v(t) = a_0 u_0(t) + a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)$$

approximerar funktionen $t^2, -1 \le t \le 1$, så att det kvadratiska medelfelet,

$$\|t^2 - v(t)\|^2,$$

är så litet som möjligt. Beräkna också felets storlek. (5p)

6. Man har till förfogande en apparat som samplar inkommande signaler $x(t)$ med ett valbart sampelintervall T och sedan återskapar en tidskontinuerlig signal $\hat{x}(t)$ utifrån sampelvärdena med en pulsamplitudmodulator. Modulatorns pulsfunktion har en fouriertransform $P(f)$ enligt figuren:



a. Vilket samband råder mellan fouriertransformerna $X(f)$ och $\hat{X}(f)$ för $x(t)$ respektive $\hat{x}(t)$? Motivera Ditt svar. (4p)

b. Signalen $x(t)$ är bandbegränsad med bandbredden 20kHz. Kan sampelintervallet T väljas så att $\hat{x}(t)$ är proportionell mot $x(t)$? Om ja, vilket är det största möjliga sampelintervallet? Motivera Ditt svar. (4p)

Lycka till!