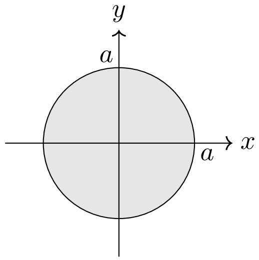
Lektion 11, Flervariabelanalys den 9 februari 2000

14.4.2 Beräkna integralen

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

där D är disken $x^2+y^2 \le a^2$ och $a>0$.

Vi ritar upp disken D.



Vi kan ganska enkelt beskriva området med polära koordinater,

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Om vi därför gör ett byte till polära koordinater övergår areaelementet $dx\,dy$ till $r\,dr\,d\theta$ och uttrycket $\sqrt{x^2+y^2}$ till

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = |r|\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = |r|.$$

Dubbelintegralen blir

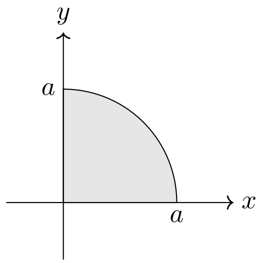
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D r\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2\,dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^a = \tfrac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{2}{3}\pi a^3.$$

14.4.10 Beräkna integralen

$$\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dA,$$

där Q är kvartsdisken $x\ge 0$, $y\ge 0$ och $x^2+y^2\le a^2$ med $a>0$.

Området Q består av den del av cirkeldisken i första kvadranten.



Eftersom integranden är positiv i området vållar inte den misstänkta singulariteten i origo några beräkningstekniska problem eftersom integralen konvergerar om och endast om dess itererade varianter konvergerar.

Området beskriver vi enklast med polära koordinater

$$0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le r \le a.$$

Ett byte till polära koordinater förändrar areaelementet dA till $r\,dr\,d\theta$ och omvandlar integranden till

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\,r\cos\theta\,r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = 2\cos\theta\,\sin\theta.$$

Dubbelintegralen blir

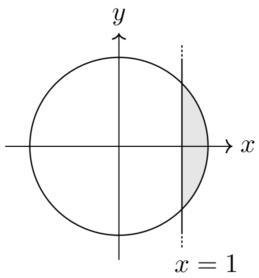
$$\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_Q 2\,\cos\theta\,\sin\theta\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^a r\,dr$$
$$= \Big[\sin^2\theta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^a = \tfrac{1}{2}a^2.$$

14.4.12 Bestäm

$$\iint_S x\,dA,$$

där S är cirkelsegmentet $x^2+y^2\le 2$, $x\ge 1$.

Området består av alla punkter innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie $\sqrt{2}$, och med x-koordinat större än eller lika med 1.



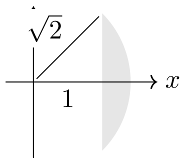
Området har ett visst mått av cirkelform så vi kan försöka oss på att beskriva området med polära koordinater.

Vinkeln θ ska gå mellan

$$-\arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{4}\pi$$

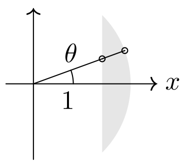
och

$$\arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}\pi.$$



Radien r har $\sqrt{2}$ som övre gräns och

$$\frac{1}{\cos\theta}$$



som undre gräns.

Området beskrivs alltså i polära koordinater som

$$-\tfrac{1}{4}\pi \le \theta \le \tfrac{1}{4}\pi, \quad \tfrac{1}{\cos\theta} \le r \le \sqrt{2}.$$

Areaelementet är $r\,dr\,d\theta$ och integranden är $x = r\cos\theta$.

Dubbelintegralen blir

$$\begin{aligned}\iint_S x\,dA &= \iint_S r\cos\theta\; r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta\int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} r^2\,dr\\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}}d\theta = \tfrac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\Big(2\sqrt{2}-\frac{1}{\cos^3\theta}\Big)\,d\theta\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta - \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \frac{1}{3}\Big[\tan\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot 2 = 2/3.\end{aligned}$$

Anm. I detta fall är det inte ”självklart” att vi ska använda polära koordinater. I kartesiska koordinater kan området skrivas

$$1\le x\le\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2-x^2}\le y\le\sqrt{2-x^2},$$

och integralen blir

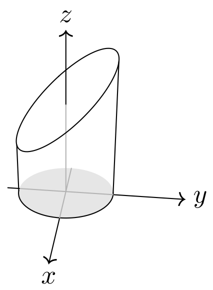
$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy &= \{\, s = 2-x^2;\ ds = -2x\,dx\,\}\\ &= -\int_1^0 \sqrt{s}\,ds = \Big[\tfrac{2}{3}\,s\sqrt{s}\,\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

14.4.24 Bestäm volymen av det område som ligger ovanför x,y-planet, innanför cylindern $x^2+y^2=4$ och under planet $z=x+y+4$.

Innanför cylindern, som har radie 2, uppfyller planets z-koordinat

$$z = x+y+4 \ge -2-2+4 = 0$$

och är alltså ovanför x, y-planet. Vi har därmed följande principskiss.



Området kan alltså beskrivas som under funktionsytan $z = x + y + 4$ och innanför disken $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Volymen ges av den välkända formeln

$$V = \iint_D (x + y + 4)\, dx\, dy.$$

Eftersom området är cirkelsymmetriskt beskrivs det enklast med polära koordinater

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2.$$

Volymintegralen är

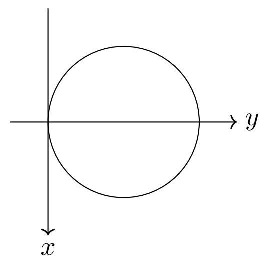
$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x + y + 4)\, dx\, dy = \{\, \text{polära koordinater} \,\} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r\cos\theta + r\sin\theta + 4)\; r\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \Big[\, \tfrac{1}{3} r^3 \cos\theta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin\theta + 2r^2 \,\Big]_0^2 \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\tfrac{8}{3}\cos\theta + \tfrac{8}{3}\sin\theta + 8 \Big)\, d\theta \\
&= \{\, \text{integral av cos eller sin över en hel period} = 0 \,\} \\
&= \Big[\, 8\theta \,\Big]_0^{2\pi} = 16\pi.
\end{aligned}$$

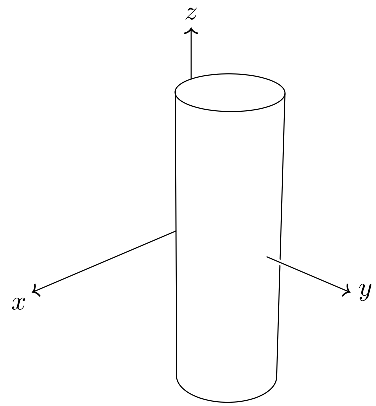
14.4.26 Bestäm volymen av området innanför den cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = 2y$ och innanför den paraboliska cylindern $z^2 = y$.

Vi skriver först den cirkulära cylindern i standardform. Kvadratkomplettering i y ger

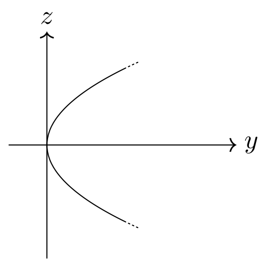
$$0 = x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

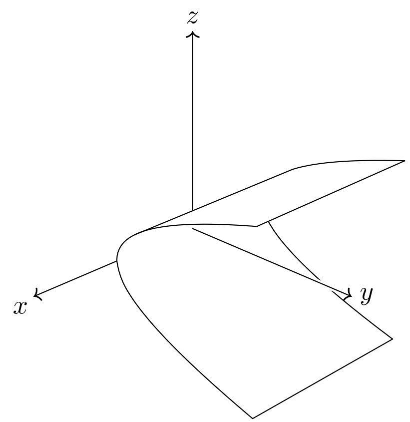
Den cirkulära cylindern har alltså mittpunkt i $(x, y) = (0, 1)$ och radie 1.





Den paraboliska cylindern är en parabel i y, z-planet.

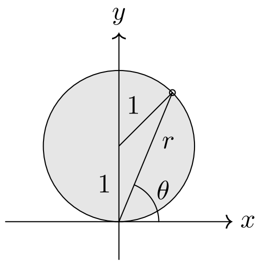




Området är alltså alla punkter innanför cirkeln $x^2 + (y-1)^2 = 1$ och mellan de två grenarna $z = -\sqrt{y}$ och $z = \sqrt{y}$. Volymen ges av integralen

$$V = \iint_D \left(\sqrt{y} - (-\sqrt{y})\right) dx\,dy = 2\iint_D \sqrt{y}\;dx\,dy.$$

Eftersom området är cirkulärt inför vi polära koordinater. Vinkeln θ ska gå mellan 0 och π.



Radien r har 0 som undre gräns, och cosinussatsen ger att den övre gränsen uppfyller

$$1^2 = 1^2 + r^2 - 2r\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 2\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta.$$

Området kan alltså beskrivas som

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le 2\sin\theta.$$

Volymintegralen blir

$$\begin{aligned} V &= 2\iint_D \sqrt{y}\;dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\} \\ &= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \sqrt{r\sin\theta}\; r\,dr = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta}\left[\tfrac{2}{5}r^2\sqrt{r}\,\right]_0^{2\sin\theta} d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta}\cdot\tfrac{2}{5}\,4\sin^2\theta\sqrt{2}\,\sqrt{\sin\theta}\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\left[-\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{5}\left(1 - \tfrac{1}{3} - \left(-1 + \tfrac{1}{3}\right)\right) = \frac{64\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Anm. Om vi bara sett till att förenkla området skulle vi infört polära koordinater centrerade kring $(0,1)$,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= 1 + r\sin\theta, \end{aligned}$$

vilket hade givit

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1.$$

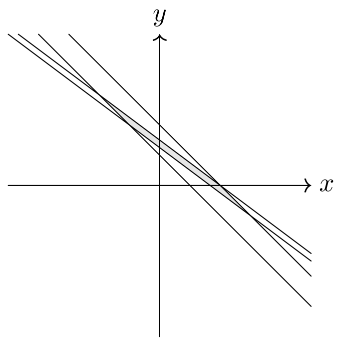
Men då hade integranden blivit jobbigare, så det är tveksamt om detta varit bättre. Det är alltid en balans mellan att förenkla integrationsområdet och att se till integrandens analytiska form, även om förenkling av integrationsområdet ofta väger tyngre.

14.4.32 Bestäm

$$\iint_P (x^2 + y^2)\,dA$$

där P är parallellogrammet som begränsas av de räta linjerna $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ och $3x + 4y = 6$.

Vi ritar upp området P.



Området förenklas om vi väljer ett nytt koordinatsystem med områdets begränsningslinjer som koordinatlinjer,

$$\begin{aligned} u &= x + y, \\ v &= 3x + 4y. \end{aligned} \qquad (*)$$

Detta linjära koordinatbyte är 1:1 eftersom determinanten av basbytesmatrisen är

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

I detta nya koordinatsystem beskrivs området P som $1 \le u \le 2,\ 5 \le v \le 6$. Vid övergången till (u, v)-planet ändras areaelementet till

$$dx\,dy = \left|\det\Bigl(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Bigr)\right| du\,dv = \text{belopp}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv.$$

Från $(*)$ kan vi uttrycka x och y i u och v,

$$\begin{aligned} x &= 4u - v \\ y &= -3u + v \end{aligned}$$

och får

$$dx\,dy = \text{belopp}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} du\,dv = du\,dv.$$

Integralen blir

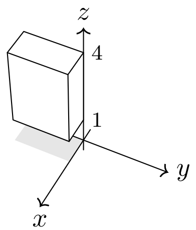
$$\begin{aligned} \iint_P (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_1^2 du \int_5^6 \bigl((4u-v)^2 + (-3u+v)^2\bigr)\,dv \\ &= \int_1^2 du \int_5^6 \bigl(25u^2 - 14uv + 2v^2\bigr)\,dv \\ &= \int_1^2 du \Bigl[\, 25u^2v - 7uv^2 + \tfrac{2}{3}v^3 \,\Bigr]_{v=5}^{v=6} \\ &= \int_1^2 \Bigl(150u^2 - 252u + 144 - \bigl(125u^2 - 175u + \tfrac{250}{3}\bigr)\Bigr)\,du \\ &= \int_1^2 \bigl(25u^2 - 77u + \tfrac{182}{3}\bigr)\,du \\ &= \Bigl[\, \tfrac{25}{3}u^3 - \tfrac{77}{2}u^2 + \tfrac{182}{3}u \,\Bigr]_1^2 \\ &= \tfrac{200}{3} - 154 + \tfrac{364}{3} - \bigl(\tfrac{25}{3} - \tfrac{77}{2} + \tfrac{182}{3}\bigr) = \tfrac{7}{2}. \end{aligned}$$

14.5.2 Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_B xyz\,dV,$$

där B är rätblocket $0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 0,\ 1 \le z \le 4$.

Vi ritar upp rätblocket B.



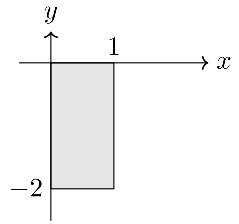
Området kan vi se som bestående av alla punkter (x, y, z) med x, y-koordinat innanför rektangeln $D : 0 \le x \le 1, -2 \le y \le 0$ och z-koordinat mellan funktionsytorna $z = 1$ och $z = 4$.

Med iterationsformeln har vi

$$\begin{aligned} \iiint_B xyz\,dV &= \iint_D dx\,dy \int_1^4 xyz\,dz \\ &= \iint_D dx\,dy\; xy \Bigl[\, \tfrac{1}{2}z^2 \,\Bigr]_1^4 = \frac{15}{2} \iint_D xy\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Området D kan i sin tur beskrivas som området mellan funktionskurvorna $y = -2$ och $y = 0$.

$$0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 0$$



Vi får med iterationsformeln

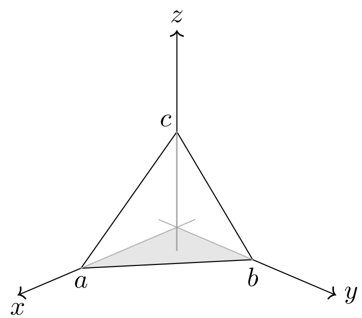
$$\begin{aligned}\frac{15}{2}\iint_D xy\,dx\,dy &= \frac{15}{2}\int_0^1 dx \int_{-1}^0 xy\,dy\\ = \frac{15}{2}\int_0^1 dx\,\Big[\,\tfrac{1}{2}y^2\,\Big]_{-2}^0 &= -15\int_0^1 x\,dx = -15/2.\end{aligned}$$

14.5.4 Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_R x\,dV,$$

där R är tetraedern som begränsas av koordinatplanen och planet $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Planet $x/a + y/b + z/c = 1$ skär koordinataxlarna i punkterna $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ och $(0,0,c)$ varför tetraedern har utseendet

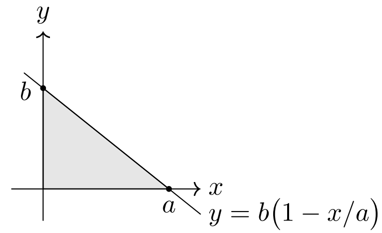


Vi kan beskriva området som alla punkter (x,y,z) med x,y-koordinater innanför bastriangeln T i x,y-planet och z-koordinat mellan funktionsytorna $z = 0$ och $z = c(1 - x/a - y/b)$. Iterationsformeln ger

$$\begin{aligned}\iiint_R x\,dV &= \iint_T x\,dx\,dy \int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz\\ &= c\iint_T x(1 - x/a - y/b)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Triangeln T kan beskrivas som området mellan funktionskurvorna $y = 0$ och $y = b(1 - x/a)$.

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b(1 - x/a)$$



Vi får

$$\begin{aligned}c\iint_T x\Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\,dx\,dy &= c\int_0^a x\,dx \int_0^{b(1-x/a)} \Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\,dy\\ &= c\int_0^a x\,dx\,\Big[\,\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)y - \frac{1}{2b}y^2\,\Big]_0^{b(1-x/a)}\\ &= c\int_0^a x\Big(b\big(1 - x/a\big)^2 - \tfrac{1}{2}b\big(1 - x/a\big)^2\Big)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}bc\int_0^a x\big(1 - x/a\big)^2\,dx = \tfrac{1}{2}bc\int_0^a \big(x - \tfrac{2}{a}x^2 + \tfrac{1}{a^2}x^3\big)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}bc\,\Big[\,\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3a}x^3 - \tfrac{1}{4a^2}x^4\,\Big]_0^a = \tfrac{1}{2}bc\Big(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{2}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2\Big) = \tfrac{1}{24}a^2bc.\end{aligned}$$

14.5.10 Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_R y\,dV,$$

där R är den del av kuben $0 \leq x, y, z \leq 1$ som ligger ovanför planet $y+z=1$ och under planet $x+y+z=2$.

Området R består av alla punkter (x,y,z) som uppfyller olikheterna

$$0 \leq x \leq 1, \qquad (1)$$
$$0 \leq y \leq 1, \qquad (2)$$
$$0 \leq z \leq 1, \qquad (3)$$
$$y+z \geq 1, \qquad (4)$$
$$x+y+z \leq 2. \qquad (5)$$

Istället för att försöka rita upp det ganska komplicerade området R ska vi skriva om (1) till (6) till en form som vi direkt kan använda i en itererad variant av trippelintegralen.

Från (3) får vi olikheten

$$0 \leq z \leq 1. \qquad (6)$$

Olikhet (2) och (4) ger

$$0 \leq y \leq 1-z. \qquad (7)$$

Olikhet (1) och (5) ger

$$0 \leq x \leq 2-y-z. \qquad (8)$$

Vi har därmed visat att

$$\left\{\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1,\\ 0 \leq y \leq 1,\\ 0 \leq z \leq 1,\\ y+z \geq 1,\\ x+y+z \leq 2, \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned} &0 \leq z \leq 1,\\ &0 \leq y \leq 1-z,\\ &0 \leq x \leq 2-y-z. \end{aligned}\right.$$

För att (6) till (8) ska beskriva samma område som (1) till (5) måste vi också visa den omvända implikationen, d.v.s. att (6), (7) och (8) medför olikheterna (1) till (5).

(3): följer direkt av (6),

(4): följer direkt av (7),

(5): följer direkt av (8),

(2): $y \leq 1:$ följer av (7),
$y \geq 0:$ (7) och (6) ger $y \geq 1-z \geq 1-1=0$,

(1): $x \leq 1:$ (8) och (4) ger $x \leq 2-y-z = 2-(y+z) \leq 2-1=1$,
$x \geq 0:$ följer av (8).

Trippelintegralen är

$$\begin{aligned}
\iiint_R y\,dV &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y\,dy \int_0^{2-y-z} dx = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y\,dy \Big[\, x \,\Big]_0^{2-y-z}\\
&= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y(2-y-z)\,dy = \int_0^1 dz \Big[\, y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 z \,\Big]_0^{1-z}\\
&= \int_0^1 \Big((1-z)^2 - \tfrac{1}{3}(1-z)^3 - \tfrac{1}{2}z(1-z)^2 \Big)\,dz = \int_0^1 (1-z)^2\big(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6}z\big)\,dz\\
&= \tfrac{1}{6}\int_0^1 (1-2z+z^2)(4-z)\,dz = \tfrac{1}{6}\int_0^1 \big(4 - 9z + 6z^2 - z^3\big)\,dz\\
&= \tfrac{1}{6}\Big[\, 4z - \tfrac{9}{2}z^2 + 2z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \,\Big]_0^1 = \tfrac{5}{24}.
\end{aligned}$$