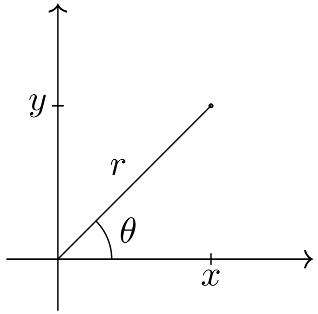
Polära koordinater

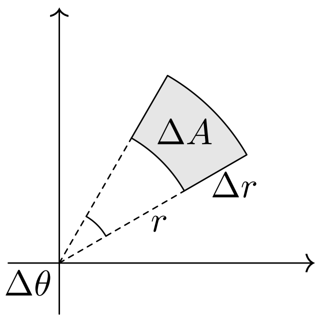
Enpunkts läge i planet beskrivs av dess avstånd r från origo och den vinkel θ som punkten har relativt x-axeln.



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Areaelementet har i polär form utseendet

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

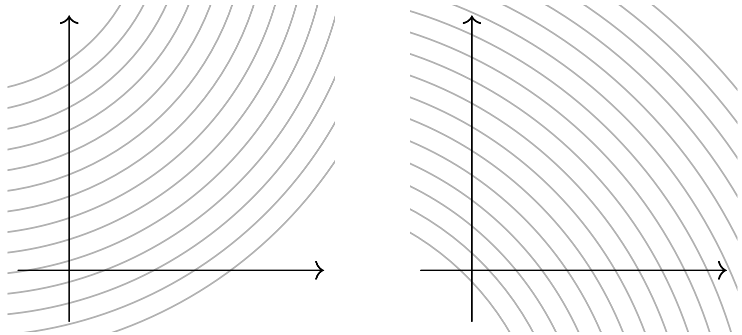


eftersom

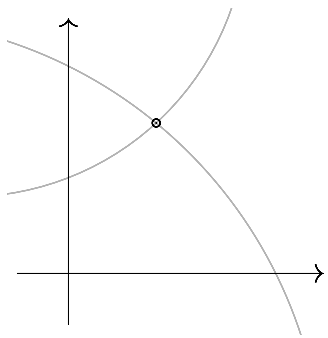
$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\Delta\theta\left[(r+\Delta r)^2 - r^2\right] = r\,\Delta r\,\Delta\theta + O(\Delta\theta)^2.$$

Allmänna koordinatsystem

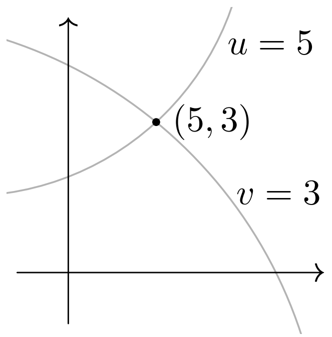
Antag att vi har två kurvskaror u-kurvor och v-kurvor som genomkorsar planet.



Vi kan då ange en punkts läge i planet om vi talar om på vilken u- och v-kurva punkten ligger.



Ofta har man ett tal förknippat med varje u-kurvan, ett index. Med talet kan vi då identifiera vilken u-kurva punkten befinner sig på. Med motsvarande tal för v-kurvorna kan vi ange punktens läge med ett talpar (u, v). Detta talpar säger vi är punktens u, v-koordinater.

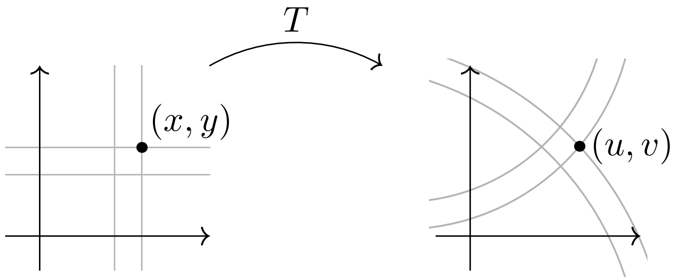


För att inte flera punkter ska ha samma koordinat kräver vi att varje u-kurva skär varje annan v-kurva i exakt en punkt.

Analytiskt kan vi uttrycka dessa två kurvskaror med en 1:1 avbildning

$$T\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

som avbildar koordinatlinjerna i det kartesiska koordinatsystemet till u- och v-kurvorna.

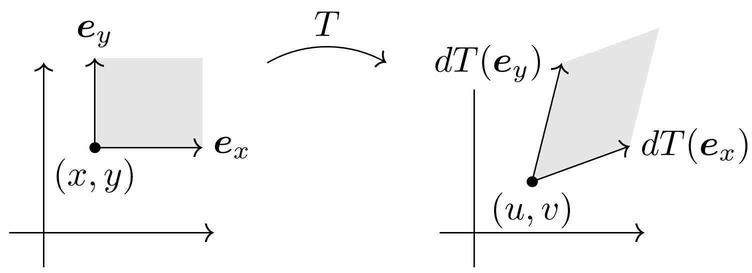


En punkt med kartesiska koordinater (x, y) får $\bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr)$ som u, v-koordinater.

Areaelementet

Areaelementet i ett allmänt koordinatsystem (u, v) ges av uttrycket

$$dA = \left|\det\Bigl(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Bigr)\right| du\,dv.$$

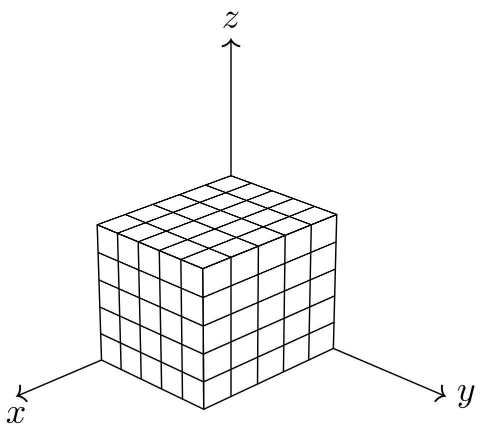


$$\text{Area} = 1 \qquad \begin{aligned} \text{Area} &= \bigl|\det\bigl(dT(\boldsymbol{e}_x)\ dT(\boldsymbol{e}_y)\bigr)\bigr| \\ &= \left|\det\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)\right| \end{aligned}$$

Trippelintegraler

Trippelintegralen definieras analogt med dubbelintegralen.

Ett ändligt rätblock R delas upp i delrätblock med volymer ΔV_{ijk} och i varje delrätblock väljer vi en punkt p_{ijk}.



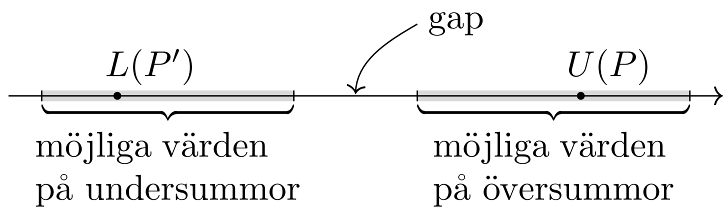
Vi definierar sedan Riemannsumman

$$\sum_{i,j,k} f(p_{ijk})\,\Delta V_{ijk}.$$

I varje delrätblock har f ett största värde M_{ijk} och ett minsta värde m_{ijk}. Vi bildar över- och undersumman av f,

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum M_{ijk}\Delta V_{ijk}, \\ L(f,P) &= \sum m_{ijk}\Delta V_{ijk}. \end{aligned}$$

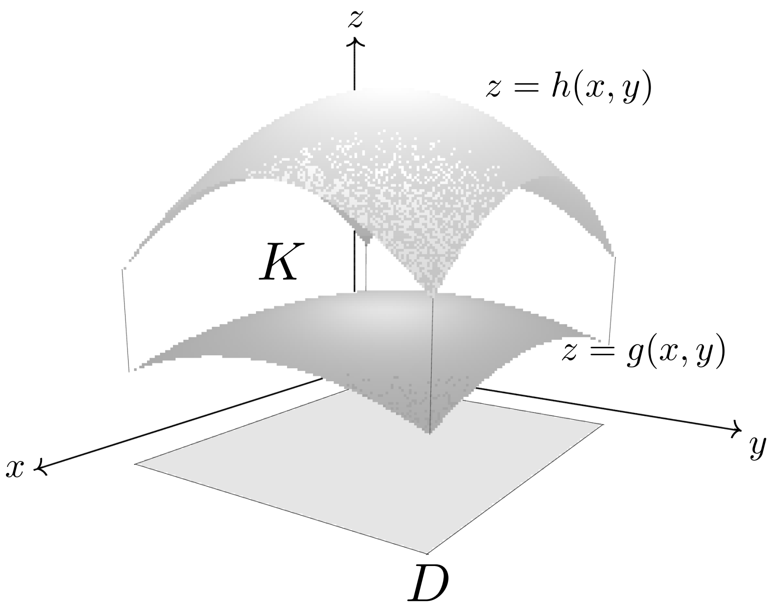
Om vi ritar upp de möjliga värden som över- och undersummorna kan anta för alla möjliga partitioner P få vi figuren



Om gapet mellan över- och undersummor består av exakt ett tal I säger vi att f är integrabel på R och talet I kallas för den bestämda integralen av f över R och betecknas

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Iteration av trippelintegraler



Om K är området mellan funktionsytorna $z = g(x, y)$ och $z = h(x, y)$, och innanför området D i x, y-planet, då är

$$\iiint_K f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D dx\, dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Analoga formler gäller när K projiceras på x, z- respektive y, z-planet.