Beräkning av massa

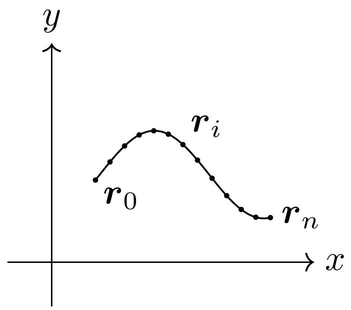
Givet en parameterkurva

$$C: \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

och en masstäthet (densitet = massa per längdenhet) $\varrho = \varrho\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$ som varierar över kurvan.

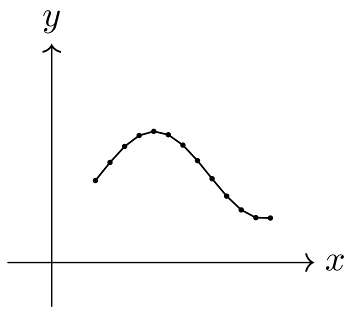
Vi ska bestämma kurvans totala massa.

Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Detta ger samtidigt en indelning av parameterkurvan,



där $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$.

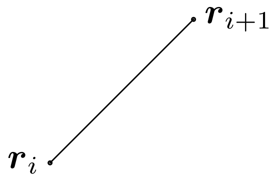
I varje kurvstycke approximerar vi kurvan med ett linjestycke



Om varje linjestycke är tillräckligt kort kommer densiteten inte att variera nämnvärt över linjestycket och vi kan approximera kurvans massa med

$$M \approx \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(\boldsymbol{r}_i)\, L_i,$$

där L_i är längden av det i:te linjestycket och $\varrho(\boldsymbol{r}_i)$ är densiteten i linjestyckets ena ändpunkt.



$$L_i = |\boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i| = |\Delta \boldsymbol{r}_i|$$

Låter vi indelningen av kurvan gå mot 0, d.v.s. $n \to \infty$, får vi kurvans verkliga massa.

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(\boldsymbol{r}_i) |\Delta \boldsymbol{r}_i| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(\boldsymbol{r}_i) \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i \\
&= \{\, \text{Differentialkalkylens medelvärdessats,} \\
&\qquad \text{Taylorutveckling}\,\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \big(\varrho(\boldsymbol{r}(\tau_i)) + O(\Delta t_i)\big)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)|\, \Delta t_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\varrho\big(\boldsymbol{r}(\tau_i)\big) |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)| \Delta t_i + O(\Delta t_i)^2\Big]
\end{aligned}$$

$$= \{\,\text{Riemannsumma}\,\}$$
$$= \int_a^b \varrho\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\,|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt.$$

Uttrycket $ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt$ är båglängdselementet.

Linjeintegralen med avseende på båglängd

Vi definerar

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds = \int_a^b f\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\,|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt$$

för någon parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ av kurvan C.

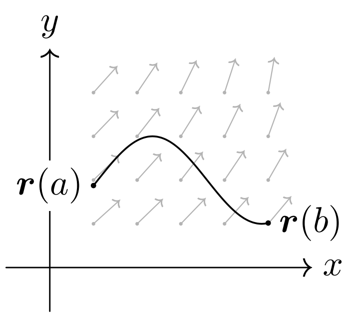
Sats Värdet av $\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds$ är oberoende av val av parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Beräkning av arbete

Givet en partikel som rör sig längs parameterkurvan

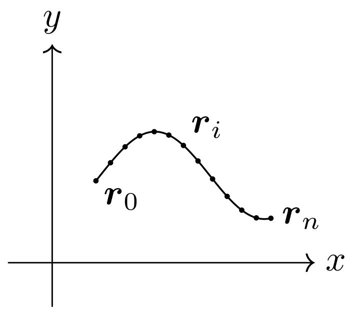
$$C:\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \le t \le b).$$

I planet finns samtidigt ett kraftvektorfält $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.



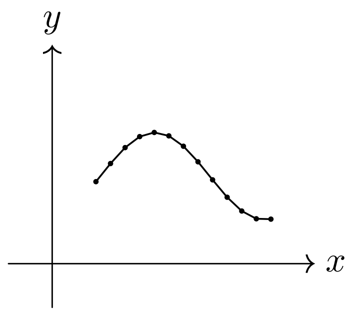
Vi ska bestämma det arbete som kraftfältet uträttat på partikeln.

Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Detta ger samtidigt en indelning av parameterkurvan,

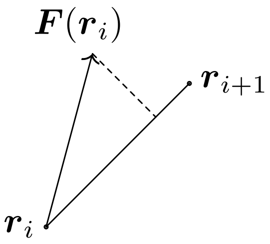


där $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$.

I varje kurvstycke approximerar vi kurvan med ett linjestycke.



Om varje linjestycke är tillräckligt litet kommer kraftfältet mer eller mindre vara konstant över linjestycket och det arbete som kraftfältet uträttat är approximativt



$$\Delta W_i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i.$$

Det totala arbetet blir approximativt

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i.$$

Låter vi indelningen av kurvan gå mot 0, d.v.s. $n \to \infty$, får vi det verkliga arbetet

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta t_i} \, \Delta t_i \\
&= \{\,\text{Differentialkalkylens medelvärdessats,} \\
&\qquad \text{Taylorutveckling}\,\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(\tau_i)\big) + O(\Delta\tau_i)\Big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)\, \Delta t_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(\tau_i)\big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)\, \Delta t_i + O(\Delta t_i)^2\Big] \\
&= \{\,\text{Riemannsumma}\,\} \\
&= \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Linjeintegral av vektorfält

Vi definierar

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt$$

för någon parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ av kurvan C.

Sats Värdet av $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av val av parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Om kurvan C är sluten brukar man skriva

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Linjeintegral av konservativt vektorfält

Om $\boldsymbol{F}$ är ett konservativt vektorfält med potentialen Φ, då är

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(p) - \Phi(q)$$

där p och q är kurvan C:s ändpunkter.

Bevis Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ vara en parametrisering av C. Vi har

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_a^b \nabla\Phi \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \Big)\,dt \\
&= \{\,\text{Kedjeregeln}\,\} = \int_a^b \frac{d}{dt}\Phi\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\,dt \\
&= \Phi\big(\boldsymbol{r}(b)\big) - \Phi\big(\boldsymbol{r}(a)\big) = \Phi(p) - \Phi(q).
\end{aligned}$$

Sats Om D är ett öppet enkelt sammanhängande område, då är följande utsagor ekvivalenta

- $\boldsymbol{F}$ är konservativ i D,
- $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ för alla slutna kurvor C i D,
- $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ beror bara på C:s ändpunkter om C ligger helt inom D.

Sats Om D är ett öppet enkelt sammanhängande område, då är

$$\boldsymbol{F} \text{ konservativ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} \text{ symmetrisk.}$$