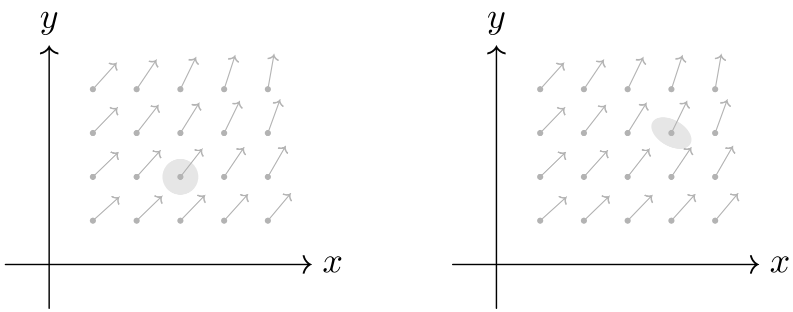
Divergens

Antag att $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett vektorfält, då definieras divergensen av $\boldsymbol{F}$ som

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \text{spår}\, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Om vi tänker oss att $\boldsymbol{F}$ beskriver hastighetsfältet till en strömmande vätska och kring en punkt P har vi en liten kontrollvolym ΔV, då anger $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ första ordningens volymförändring av kontrollvolymen om den flyter med vätskan.



tid $= t$ tid $= t + \Delta t$

volym $= \Delta V$ volym $= \Delta V + (\operatorname{div} \boldsymbol{F})\Delta V \Delta t + o(\Delta t)$

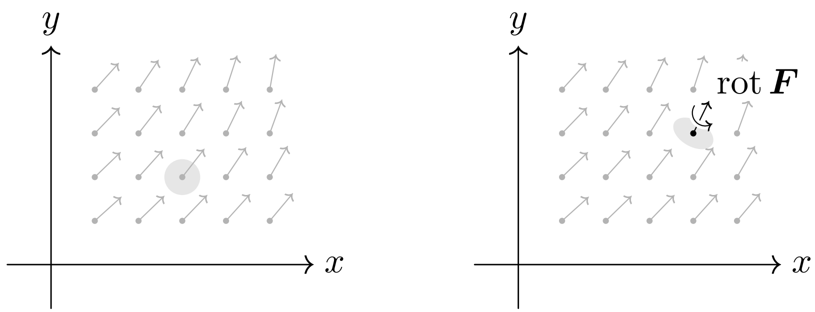
Divergensen $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ är alltså den relativa volymändringen per tidsenhet, d.v.s. $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ mäter hur mycket vätska som produceras i punkten P och kallas också för källtätheten i punkten P.

Rotation

Antag att $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett vektorfält, då definieras rotationen av $\boldsymbol{F}$ som

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right).$$

Om vi tänker oss att $\boldsymbol{F}$ beskriver hastighetsfältet till en strömmande vätska och kring en punkt P har vi en liten kontrollvolym, då anger $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ den första ordningens stela rotation som kontrollvolymen genomgår då den flyter med vätskan.



tid $= t$ tid $= t + \Delta t$

rot. axel $\parallel$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} + o(\Delta t)$

vinkel $= \frac{1}{2} \|\operatorname{rot} \boldsymbol{F}\| \Delta t + o(\Delta t)$

Rotationen $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ mäter alltså hur mycket vektorfältet virvlar i punkten P.

Sats Om området är enkelt sammanhängande, då är

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F} \text{ konservativt.}$$

Bevis

$\boldsymbol{F}$ konservativt

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ symmetrisk}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{0}.$$

Greens formel i planet

Låt D vara ett slutet området med en styckvis regulär enkel randkurva C som är positivt orienterad (moturs), och antag att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är kontinuerligt deriverbar på D. Då gäller att

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$