Z.C.4.6.24.

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x) = \frac{1}{\cos(\ln x)}$$

Linjärt oberoende lösningar till den homogena DE är :

$$y_1 = \cos(\ln x) \quad \text{resp} \quad y_2 = \sin(\ln x)$$

Vi skriver DE på standardform :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2 \cos(\ln x)}$$

Variation av parametrar med ansatsen :

$$y_p = u(x)\cos(\ln x) + v(x)\sin(\ln x)$$

ger följande system :

$$\begin{pmatrix} \cos(\ln x) & \sin(\ln x) \\ \dfrac{-\sin(\ln x)}{x} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{x^2 \cos(\ln x)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Systemdeterminanten} = \text{Wronskideterminanten} = \frac{1}{x}\ .$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(\ln x) \\ \dfrac{1}{x^2\cos(\ln x)} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-\sin(\ln x)}{x\cos(\ln x)} \\ v' = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos(\ln x) & 0 \\ \dfrac{-\sin(\ln x)}{x} & \dfrac{1}{x^2\cos(\ln x)} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Integrera map x:

$$\begin{cases} u = \ln|\cos(\ln x)| \\ v = \ln|x| \end{cases}$$

$\boxed{\text{Vi erhåller partikulärlösningen :}}$

$$\boxed{y_p = \ln\left|\cos(\ln x)\right| \cos(\ln x) + \ln x \sin(\ln x)}$$