Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Måndagen den 20 oktober 2003, kl 1400-1900.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 7 uppgifter. För godkänt krävs alla moduler godkända..
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-13, 16 ger 3 poäng vardera, 14-15 ger 4 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 14 poäng på del 2.

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN PERIOD 1 2003. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...7.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Uppgift | Nr | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Modul BioK | Nr | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 6 | 7 |
| Modul BM | Nr | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 5 | 6 |

Del 1

1. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och xy-planet.
Lösning:
Volymen erhålles som $V = \iiint_V dxdydz$ .

Integrera först i z-led. $V = \iiint_V dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} dz \right) dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy$ .

Bestäm området $D_{xy}$ . Skärningskurvan mellan paraboloiden och xy-planet är $x^2 + y^2 = 4$.
Integrationsområdet $D_{xy} = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \le 4\right\}$. Inför polära koordinater.

$$V = \iint_{D_{rv}} \left(4 - r^2\right) r dr dv = 2\pi \int_{r=0}^{2} (4r - r^3) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2} = 8\pi .$$

SVAR: Den sökta volymen $V = 8\pi$.

2. Beräkna $\iint_S (2z - 2 + y) d\sigma$ , där $S$ är den del av planet $2x + 3y + 6z = 12$ som ligger i första oktanten.
Lösning:
Vi projicerar ytan $S$ på xy-planet. Dess projektion ges av $D_{xy} = \left\{(x,y): 2x + 3y \le 12\right\}$.
Integrationselementet $d\sigma$ ersättes med $\dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$ .
En enhetsnormal till $S$ ges av $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(2,3,6)}{7}$. Riktningscosinen $\cos\gamma = \dfrac{6}{7}$.
Den sökta ytintegralen övergår då i en dubbelintegral.

$$I = \iint_S (2z - 2 + y) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{1}{3}(12 - 2x - 3y) - 2 + y\right) \frac{dxdy}{\left|\frac{6}{7}\right|} = \frac{7 \cdot 2}{18} \iint_{D_{xy}} (3 - x) dxdy$$

Integranden är en funktion av x. Integrerar först med avseende på y.

$$I = \frac{7}{9} \int_{x=0}^{6} \left( \int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} (3 - x) dy \right) dx = \frac{7}{9} \int_{x=0}^{6} \frac{2(6 - x)}{3} (3 - x) dx = \frac{14}{27} \int_{x=0}^{6} (18 - 9x + x^2) dx$$

$$\square = \frac{14}{27}\left[18x - 9\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{6} = \frac{14}{27}\left(18\cdot 6 - 9\cdot 18 + 4\cdot 18\right) = \frac{28}{3}$$

SVAR: Den sökta ytintegralen $\iint_S (2z - 2 + y)\,d\sigma = \dfrac{28}{3}$.

3. Lös följande variant av värmeledningsproblemet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0\ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{2}(1 + 3\cos x)\ ,\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Lösning:

Vi separerar variablerna: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{\lambda t}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in \mathbf{R}$ |
|---|---|---|
| $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$ | $X(x) = A_2 x + B_2$ | $X(x) = A_3\cos\mu x + B_3\sin\mu x$ |

Randvillkoren $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ tillsammans med variabelseparationen ger att:

$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0$. Detta skall gälla för alla $t$: $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$ | $X'(x) = A_2$ | $X'(x) = \mu(-A_3\sin\mu x + B_3\cos\mu x)$ |

Insättning av ändpunkterna ger:

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(A_1 - B_1) \\ 0 = X'(\pi) = \mu(A_1 e^{\mu\pi} - B_1 e^{-\mu\pi}) \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 = X'(0) = A_2 \\ 0 = X'(\pi) = A_2 \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(B_3) \\ 0 = X'(\pi) = \mu(-A_3\sin\mu\pi + B_3\cos\mu\pi) \end{cases}$ |
| Endast den triviala lösningen. | $X(x) = B_2$ | $\begin{cases} B_3 = 0 \\ \mu\pi = n\pi \end{cases}$ $X(x) = A_3\cos nx$ |

Motsvarande "T-lösningar" blir:

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| | $T(t) = C_2$ | $T(t) = C_3 e^{-n^2 t}$ |

Vi har erhållit två uppsättningar med lösningar.

| $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \in R$ |
|---|---|
| $u(x,t) = B_2 C_2$ | $u(x,t) = A_3\cos nx\ \ C_3 e^{-n^2 t}$ |

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\ \ e^{-n^2 t}$$

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Institutionen för matematik
KTH

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = \frac{1}{2}(1 + 3\cos x)$ ger: $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos nx$

Identifiering ger: $a_0 = 1,\ a_1 = \frac{3}{2}$ och $a_n = 0$ för övrigt.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos x\ e^{-t}$.

4. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$
samt avgör om de är stabila eller instabila.
Lösning:
Stationära lösningar erhålles då derivatan är lika med noll, dvs då $y = \pm 3$.
Vi studerar derivatans tecken.

$y > 3$ : $\frac{dy}{dx} > 0$ , $y$ är växande.

$3 > y > -3$ : $\frac{dy}{dx} < 0$ , $y$ är avtagande.

$-3 > y$ : $\frac{dy}{dx} > 0$ , $y$ är växande.

Den stationära lösningen $y = 3$ är instabil och den stationära lösningen $y = -3$ är stabil.

5. Lös integralekvationen $y(t) = \sin t - \int_0^t (t - u)y(u)du$ .

Lösning:
Laplacetransformera ekvationen: $Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2}Y(s)$ , enligt L24, L12 och L20 i BETA .

Lös ut $Y(s)$. $Y(s)(1 + \frac{1}{s^2}) = \frac{1}{s^2+1}$ , $Y(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$.

L42 i BETA ger: $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$ .

SVAR: Integralekvationen har lösningen $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$ .

6. $y_1(t) = t^2$ är en lösning till differentialekvationen $t^2 y'' - 2y = 0$ , $t > 0$.
Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$ , $t > 0$.
Lösning:
Vi utnyttjar lösningen till den homogena differentialekvationen för att reducera ordningen hos den inhomogena differentialekvationen genom ansatsen:

$\underline{y(t) = t^2 z(t)}$, $y' = t^2 z' + 2tz$, $y'' = t^2 z'' + 4tz' + 2z$

Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger $t^2(t^2 z'' + 4tz' + 2z) - 2t^2 z = 3t^2 - 1$.

Vi förenklar $t^4 z'' + 4t^3 z' = 3t^2 - 1$ , $(t^4 z')' = 3t^2 - 1$.

Integrera med avseende på $t$ : $t^4 z' = t^3 - t + C_1$ , $z' = t^{-1} - t^{-3} + C_1 t^{-4}$.

Integrera med avseende på $t$ : $z = \ln t + \frac{1}{2}t^{-2} + C_1 \frac{1}{-3} t^{-3} = \ln t + \frac{1}{2}t^{-2} + C_2 t^{-3} + C_3$.

Insättningi ansatsen ger. $y(t) = t^2(\ln t + \frac{1}{2}t^{-2} + C_2 t^{-3} + C_3) = C_2 t^{-1} + C_3 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$.

SVAR: Allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen är

$$y(t) = C_2 t^{-1} + C_3 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$

Institutionen för matematik
KTH

7. Bestäm den reella konstanten $\alpha$, så att det linjära systemet $\begin{cases} x' = \alpha x - 2y \\ y' = -\alpha x + y \end{cases}$

får periodiska lösningar.
Lösning:
Systemet kan skrivas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bestäm matrisens egenvärden.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ , där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -2 \\ -\alpha & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha - 2\alpha$$

Kvadratkomplettering ger: $(\lambda - \frac{1+\alpha}{2})^2 = (\frac{1+\alpha}{2})^2 + \alpha$ , $\lambda = \frac{1+\alpha}{2} \pm \sqrt{(\frac{1+\alpha}{2})^2 + \alpha}$ .

Periodiska lösningar erhålles då egenvärdena är rent imaginära.
Detta inträffar då $\alpha = -1$ och egenvärdena är då $\lambda = \pm i$ .
SVAR: Periodiska lösningar erhålles då $\alpha = -1$ .

<u>Del 2</u>

11.Beräkna för $s > 0$ funktionen $H(s) = \iint\limits_D e^{-st}(t-u)^2 \cos u\,dt\,du$ , där $D = \{(t,u) \,:\, 0 \le u \le t < \infty\}$ .

Lösning:
Här föreligger två vägar till lösning. Den ena är att först integrera med avseende på u därefter med avseende på t. I det fallet är u-gränserna 0 och t samt t -gränserna 0 till oändligheten.
Den andra vägen ger t-gränserna u till oändligheten samt u-gränserna 0 till oändligheten.
Vi redovisar beräkningarna för det första fallet.

$$H(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{u=0}^{t}(t-u)^2 \cos u\,du\right]dt$$

Den inre integralen verkar bekant. Det är en faltningsintegral och vi känner vidare igen Laplacetransformens kärna. Vi skall således beräkna Laplacetransformen för faltningen.

$$H(s) = L\{t^2\}L\{\cos t\} = \frac{2}{s^3}\frac{s}{s^2+1} = \frac{2}{s^2(s^2+1)}$$

Svar: Den sökta funktionen är $H(s) = \dfrac{2}{s^2(s^2+1)}$.

12. För funktionen $f$ gäller: $\begin{cases} f(t+2\pi) = f(t) \\ f(t) = t^2 \ , \ 0 < t < 2\pi \end{cases}$.

Ange dess Fourierserie, samt beräkna utgående från denna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Lösning:

Fourierserien är på formen: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$

Vi bestämmer Fourierseriens koefficienter med hjälp av BETA.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{2\pi} t^2 dt = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{2\pi} t^2 \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^3}\left(-2\sin nt + 2nt\cos nt + n^2t^2 \sin nt\right)\right]_{t=0}^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$$

Institutionen för matematik
KTH

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{2\pi} t^2 \sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^3}\left(2\cos nt + 2nt\sin nt - n^2t^2\cos nt\right)\right]_{t=0}^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

Vi tilldelar funktionen följande Fourierserie $f(t) \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nt - \frac{4\pi}{n}\sin nt$.

Vidare skall en viss series summa beräknas utgående från denna Fourierserie.
Insättning av ett lämpligt t-värde ger oss den önskade summan.
Vil väljer t=0 där funktionen har ett språng. Här tas medelvärdet från höger och från vänster.

$$\frac{1}{2}\left(0^2 + (2\pi)^2\right) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\;,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

SVAR: Fourierserien är $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nt - \frac{4\pi}{n}\sin nt$. Seriesumman är $\frac{\pi^2}{6}$

13. Låt $y_1(x)$ vara en känd lösning, skild ifrån noll, till $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.
$P(x)$ och $Q(x)$ är kontinuerliga på ett intervall I.

a) Låt vidare $y_2(x)$ vara en av $y_1(x)$ linjärt oberoende lösning. Härled $y_2(x)$.

b) Visa att Wronskideterminanten $W(y_1(x), y_2(x)) = Ce^{-\int P(x)dx}$.

Lösning:
Vi använder reduktion av ordning och ansätter $y = y_1(x)\cdot z(x)$.

Insättning i differentialekvationen ger

$$y_1''(x)\cdot z(x) + 2y_1'(x)\cdot z'(x) + y_1(x)\cdot z''(x) + P(x)\left(y_1'(x)\cdot z(x) + y_1(x)\cdot z'(x)\right) + Q(x)y_1(x)\cdot z(x) = 0.$$

Hyfsning ger: $y_1(x)\cdot z''(x) + \left(2y_1'(x) + P(x)\cdot y_1(x)\right)z'(x) + \left(y_1''(x) + P(x)\cdot y_1'(x) + Q(x)y_1(x)\right)z(x) = 0$.

Men $y_1(x)$ vara en känd lösning. Vi erhåller följande $y_1(x)\cdot z''(x) + \left(2y_1'(x) + P(x)\cdot y_1(x)\right)z'(x) = 0$.

Skriv differentialekvationen på normalform: $z''(x) + \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + P(x)\right)z'(x) = 0$.

Multiplicera med $y_1^{\,2}(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$, härvid blir vänstra ledet en derivata.

$$\left\{y_1^{\,2}(x)\cdot e^{\int P(x)dx} z'(x)\right\}' = 0$$

Integration med avseende på $x$ ger: $z'(x) = C_1 y_1^{-2}(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Förnyad integration med avseende på $x$ ger: $z(x) = C_1\int y_1^{-2}(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx + C_2$.

Den allmänna lösningen blir $y(x) = y_1(x)\cdot z(x) = C_1 y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx + C_2 y_1(x)$.

En av $y_1$ linjärt oberoende lösning är $y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx$.

$$W(y_1(x), y_2(x)) = W(y_1(x), y_1(x)\cdot z(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x)\cdot z(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x)\cdot z(x) + y_1(x)\cdot z'(x)\end{vmatrix} = y_1^{\,2}(x)\cdot z'(x) = y_1^{\,2}(x)\cdot C_1 y_1^{-2}(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Vi erhåller således $W(y_1(x), y_2(x)) = C_1 e^{-\int P(x)dx}$.

14. Tillväxten av en cell beror av flödet av näringsämnen(som exempelvis aminosyror) genom det omslutande cellmembranet.
Låt $W(t)$ vara cellens massa i gram vid tiden $t$, mätt i timmar, med $W(0) = W_0$.
Antag att massans tillväxthastighet är proportionell mot membranytans area och att densiteten (i g/volymsenhet) är konstant. Cellen förutsätts ha formen av ett klot (en sfär).

a) Härled att differentialekvationen för $W$ bör ha formen $\frac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ där $k$ är en konstant.

b)Bestäm $W(t)$ om $W_0 = 10^{-6}\,\mathrm{g}$ och om massan efter 1 timme är $1{,}1^3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}\ (1{,}331 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g})$ .

c)Antag att cellen börjar dela sig då massan fördubblats, dvs är $2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}$.

När startar celldelningen? (För ett numeriskt värde behövs att $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.)

Lösning.

a) Cellens massa är $W = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$ , $\rho$ är densiteten och $r$ är sfärens radie.

Membranets area är $A = 4\pi r^2$. Uttryck $A$ i $W$. $A = 4\pi\left(\left(\frac{3W}{4\pi\rho}\right)^{1/3}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{2/3} W^{2/3} = k_1 W^{2/3}$.

Massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets area ger: $\frac{dW}{dt} = k_2 A = k_2 k_1 W^{2/3} = kW^{2/3}$.

b) $\frac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ är separabel , dock saknar den triviala lösningen intresse.

Omforma differentialekvationen: $W^{-2/3}\frac{dW}{dt} = k$.

Vi integrerar med avseende på t: $3W^{1/3} = kt + C$.

Begynnelsevillkoret $W(0) = 10^{-6}$ ger: $3(10^{-6})^{1/3} = C$ , $C = 3 \cdot 10^{-2}$. $3W^{1/3} = kt + 3 \cdot 10^{-2}$.

Bestäm $k$. Efter 1 timme är massan $1{,}1^3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}$.

$3(1{,}1^3 \cdot 10^{-6})^{1/3} = k + 3 \cdot 10^{-2}$ , $k = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-3}$ , $3W^{1/3} = 3 \cdot 10^{-3} t + 3 \cdot 10^{-2}$.

Cellens massa vid tiden $t$ ges av $W(t) = 10^{-6}(0{,}1t + 1)^3\, g$.

c) Bestäm tidpunkten, $t_2$, då cellens massa är fördubblad. $2 \cdot 10^{-6} = 10^{-6}(0{,}1t_2 + 1)^3$

$t_2 = 10(2^{1/3} - 1) \approx 10(1{,}26 - 1) = 2{,}6$.

Cellens massa är fördubblad efter $2{,}6$ timmar.

SVAR: a. Se ovan.

b. Cellens massa vid tiden $t$ ges av $W(t) = 10^{-6}(0{,}1t + 1)^3\, g$.

c. Cellens massa är fördubblad efter $2{,}6$ timmar.

15. Skriv differentialekvationen $x'' + x = \left(-\frac{1}{2} - 3(x')^2\right)x' - x^2$ som ett plant autonomt system.

Bestäm systemets kritiska punkter och avgör deras karaktär, dvs stabilitet/instabilitet och typ.

Lösning:

Inför en ny variabel $y$ genom $y = x'$.

Den givna differentialekvationen övergår då i systemet $\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = -x + \left(-\frac{1}{2} - 3y^2\right)y - x^2 \end{cases}$.

Skrivet på matrisform: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + \left(-\frac{1}{2} - 3y^2\right)y - x^2 \end{pmatrix}$.

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi får då $\begin{pmatrix} y \\ -x + \left(-\frac{1}{2} - 3y^2\right)y - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi erhåller följande kritiska punkter (0, 0) och (-1,0).

Vi studerar nu det linjariserade systemet.

Först beräknas Jacobimatrisen och sätter därefter in respektive stationära(kritiska) punkt.

Jacobimatrisen blir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x & -\frac{1}{2} - 9y^2 \end{pmatrix}$.

Institutionen för matematik
KTH

Den kritiska punkten (0, 0) ger följande matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur $0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16},\ \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

Komplexa egenvärden med positiv realdel innebär att den kritiska punkten är en instabil spiralpunkt.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Den kritiska punkten (-1, 0) ger följande matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur $0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = (\lambda - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16},\ \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: (0,0) är en instabil spiralpunkt. (-1,0) är en sadelpunkt och därmed instabil.

16. Beräkna $\iint_S grad(\ln(x^2+y^2)) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ , där $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till $S$ och

a) $S$ är sfären $x^2+y^2+z^2=1$

b) $S$ är sfären $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=1$.

Lösning:
z-axeln är en singulär kurva. Detta påverkar dock inte resultatet i a). Skär bort z-axeln med en cylinder med z-axeln som axel och med radien epsilon. Efter beräkning av ytintegralen låter vi epsilon gå mot noll.

Vi bestämmer vektorfältet: $\mathbf{u}(x,y,z) = grad(\ln(x^2+y^2)) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{2x}{x^2+y^2},\ 0\right)$.

Den givna ytan är sluten. Vi prövar med divergenssatsen. I fall a) är den ej tillämpbar, däremot i b).
Vi beräknar divergensen för vektorfältet:

$$div\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial z}0 = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Divergenssatsen ger att flödesintegralen i fall b) är lika med noll.
För fall a) återstår att beräkna flödesintegralen. Då behövs den utåtriktade enhetsnormalen till ytan.

En normal till sfären är $\mathbf{n} = (2x, 2y, 2z)$. Den utåtriktade enhetsnormalen är $\hat{\mathbf{n}} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

På ytan gäller att: $\hat{\mathbf{n}} = (x,y,z)$ och därmed blir $grad(\ln(x^2+y^2)) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{2x}{x^2+y^2}x + \frac{2x}{x^2+y^2}y = 2$.

$$\iint_S grad(\ln(x^2+y^2)) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_S 2\, d\sigma = 2 \cdot \text{Sfärens area} = 2 \cdot 4\pi \cdot 1^2 = 8\pi$$

SVAR: a) $8\pi$. b) 0.