Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Måndagen den 20 oktober 2003, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 7 uppgifter. För godkänt krävs alla moduler godkända..
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-13, 16 ger 3 poäng vardera, 14-15 ger 4 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 14 poäng på del 2.

OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN PERIOD 1 2003. OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänd modul nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...7.

Uppgift	Nr	1	2	3	4	5	6	7
Modul BioK	Nr	1	2	3	5	4	6	7
Modul BM	Nr	1	2	7	4	3	5	6

<u>Del 1</u>

1. Beräkna volymen av det område som begränsas av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

2. Beräkna $\iint_S (2z - 2 + y)\,d\sigma$, där S är den del av planet $2x + 3y + 6z = 12$ som ligger i första oktanten.

3. Lös följande variant av värmeledningsproblemet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \;,\; 0 < x < \pi \;,\; t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 \;,\; t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{2}(1 + 3\cos x) \;,\; 0 < x < \pi \end{cases}$$

4. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$
samt avgör om de är stabila eller instabila.

5. Lös integralekvationen $y(t) = \sin t - \int_0^t (t - u)y(u)\,du$.

6. $y_1(t) = t^2$ är en lösning till differentialekvationen $t^2 y'' - 2y = 0$, $t > 0$.
Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$, $t > 0$.

7. Bestäm den reella konstanten α , så att det linjära systemet $\begin{cases} x' = \alpha x - 2y \\ y' = -\alpha x + y \end{cases}$
får periodiska lösningar.

VGV

Institutionen för matematik
KTH

Del 2

11. Beräkna för $s>0$ funktionen $H(s) = \iint_D e^{-st}(t-u)^2 \cos u \, dt\, du$, där $D = \{(t,u) : 0 \le u \le t < \infty\}$.

12. För funktionen f gäller: $\begin{cases} f(t+2\pi) = f(t) \\ f(t) = t^2 \ , \ 0 < t < 2\pi \end{cases}$.

Ange dess Fourierserie, samt beräkna utgående från denna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

13. Låt $y_1(x)$ vara en känd lösning, skild ifrån noll, till $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.
$P(x)$ och $Q(x)$ är kontinuerliga på ett intervall I.
(i) Låt vidare $y_2(x)$ vara en av $y_1(x)$ linjärt oberoende lösning. Härled $y_2(x)$.
(ii) Visa att Wronskideterminanten $W(y_1(x), y_2(x)) = Ce^{-\int P(x)dx}$.

14. Tillväxten av en cell beror av flödet av näringsämnen(som exempelvis aminosyror) genom det omslutande cellmembranet.
Låt $W(t)$ vara cellens massa i gram vid tiden t, mätt i timmar, med $W(0) = W_0$.
Antag att massans tillväxthastighet är proportionell mot membranytans area och att densiteten (i g/volymsenhet) är konstant. Cellen förutsätts ha formen av ett klot (en sfär).
a) Härled att differentialekvationen för W bör ha formen $\frac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ där k är en konstant.
b)Bestäm $W(t)$ om $W_0 = 10^{-6}\,\mathrm{g}$ och om massan efter 1 timme är $1{,}1^3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}$ $(1{,}331 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g})$.
c)Antag att cellen börjar dela sig då massan fördubblats, dvs är $2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}$.
När startar celldelningen? (För ett numeriskt värde behövs att $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.)

15. Skriv differentialekvationen $x'' + x = \left(\frac{1}{2} - 3(x')^2\right)x' - x^2$ som ett plant autonomt system.

Bestäm systemets kritiska punkter och avgör deras karaktär, dvs stabilitet/instabilitet och typ.

16. Beräkna $\iint_S grad(\ln(x^2+y^2)) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till S och

a) S är sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$
b) S är sfären $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$.