Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.

Lördagen den 8 november 2003, kl 0900-1400.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 3 är avsedd för betyg 3 och omfattar 7 uppgifter.
För godkänt krävs minst 6 moduler godkända.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN PERIOD 1 2003. OBS!
Detta sker enligt följande:

Uppgift	Nr	1	2	3	4	5	6	7
Modul BioK	Nr	1	2	3	4	5	6	7
Modul BM	Nr	1	2	7	3	4	5	6

Del 3

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y \, dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,2)$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r}$, där $f(x,y) = r^4$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = (x,y)$ och C är den räta linjen från punkten $(1,0)$ till punkten $(3,1)$.

3. Undersök om funktionsföljden $\{1, \cos mt, \sin nt\}$ där $m = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$ och $n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$ är ortogonal på intervallet $(-\pi, \pi)$. Uttryck därefter den 2π-periodiska funktionen f med hjälp av denna funktionsföljd då $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 2U(t-3)e^{t-3}$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. $U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

5. Differentialekvationen $2x^2 \dfrac{dy}{dx} = 3xy + y^2$ kan transformeras till en linjär differentialekvation genom att man sätter $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$. Bestäm den lösning som uppfyller villkoret $y(1) = -2$.

6. Betrakta differentialekvationen $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, $x > 0$.
Lösningar till denna homogena differentialekvation är
$y_1 = x^{-1/2}\cos x$, $y_2 = 7x^{-1/2}\sin x$, $y_3 = 5x^{-1/2}\cos x$, $y_4 = x^{-1/2}\sin x$, $y_5 = 3x^{-1/2}\cos x + 17x^{-1/2}\sin x$.
Bestäm en fundamentalmängd av lösningar, dvs en bas av lösningar, samt bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

7. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$.