KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210(5B1230).
Tisdagen den 13 januari 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 17-24p; 4: 25-31p; 5: 32-40p-, inklusive bonus.
Uppgifterna: 1 ger 4p; 2 ger 5p; 3-6 ger 3p; 7-9 ger 5p.
Bonuspoäng räknas från period 4 och period1 2003.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_{xy}} (x+y)^2\,dxdy$, där $D_{xy} = \{(x,y) : |x| + |y| \le 2\}$.

2. Bestäm den slutna ytan S som ej skär sig själv och är sådan att flödesintegralen $\iint_S \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ blir maximal. $\hat{\mathbf{n}}$ betyder den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S och $\bar{\mathbf{u}}$ är vektorfältet $(r - r^3)\bar{\mathbf{r}}$, där $\bar{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ och $r = |\bar{\mathbf{r}}|$. Beräkna även flödesintegralen för denna yta.

3. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - x$, $x(0) = x_0$.
Bestäm därefter t_0 så att $x(t) \to \infty$ då $t \to t_0$ för $x_0 > 1$.

4. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 2\delta(t - \frac{\pi}{2})$, då $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

5. Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5 - x - y) \\ y(-2 + x) \end{pmatrix}$.
Klassificiera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

6. Är följande påståenden sanna eller falska? Motivera!
a) Låt $y = \varphi(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' = y^2 + 4$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.
b) Begynnelsevärdesproblemet $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ har entydig lösning.
c) Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, där f och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två skilda lösningskurvor kan skära varandra i en punkt.

7. Bestäm fourierserien till funktionen f som ges av $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < t < 0 \\ \cos t, & 0 \le t < \pi/2 \end{cases}$, $f(t + \pi) = f(t)$.

Bestäm därefter $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

8. Visa att $\{1, e^t, e^{-2t}\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.
Bestäm också en sådan differentialekvation samt ange dess allmänna lösning.

9. Kreatinin är en restprodukt vid ämnesomsättningen i muskelvävnader. Kroppen gör sig av med produkten genom utsöndring i urinen. Redan vid en liten nedsättning av njurfunktionen höjs halten av kreatinin patologiskt. Man planerar att göra försök med hundar på vilka man tänker injicera en större dos kreatinin. Dosen väljs så stor att vävnadernas nyproduktion av ämnet kan försummas jämfört med den injicerade dosen. För att få en bild av hur utsöndringen beror av njurfunktionen tänker man sig nu, att blod och

muskelvävnader är två kärl, mellan vilka kreatininet kan diffundera. Från blodet diffunderar ämnet dessutom ut i urinen via njurarna med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen av kreatinin i blodet. Antag att diffusionshastigheten är proportionell mot skillnaden i koncentrationen av kreatininet i respektive kärl. Låt $c_b(t)$ och $c_m(t)$ vara koncentrationerna i blod respektive muskler som funktioner av tiden samt låt k och l vara diffusionskoefficienterna mellan blod/muskler respektive blod/urin.
Ställ upp motsvarande matematiska modell.
Visa att denna har lösningen $\begin{pmatrix} c_m \\ c_b \end{pmatrix} = A_1\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} + A_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}$, där $A_1,\ A_2,\ \mathbf{v_1},\ \mathbf{v}_2,\ \lambda_1$ och λ_2 är *reella*.
Ange också λ_1 och λ_2 som funktioner av k och l samt visa att de är *olika* och negativa.