KTH Matematik

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210 och Matematik IV, 5B1230.
Repetitionskursens tentamen.
Fredagen den 20 augusti 2004, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 moduler. För godkänt krävs alla moduler är godkända.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelningen på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del2.

DEL1:
Modul 1. En full tank innehåller 300 liter vatten i vilket 50 gram salt är löst.
En annan saltlösning med koncentrationen 2 gram per liter pumpas in med en hastighet av 3 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp.
Ställ även upp motsvarande differentialekvation då utpumpningshastigheten är 2 liter per minut.
Bestäm saltmängden vid tiden t för det fall då tanken ej sprängs.

Modul 2. Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 3$, $1 \le t \le 2$ och noll för övrigt.
Vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.

Modul 3. Betrakta ett linjärt system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Låt matrisen $\mathbf{A}$ vara konstant och ha egenvärdena λ_1 och λ_2.
Avgör om lösningarna är stabila eller instabila samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum)
a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.
b $\lambda_{1,2} = -1 \pm 9i$.
c) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$.

Modul 4. Bestäm den funktion, $u(x,t)$, som uppfyller differentialekvationen $u_t' = u_x'$ och villkoret $u(x,0) = 7e^{x} + 5e^{3x}$.

Modul 5.. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{x/y}\,dy\right)dx$.

Modul 6. Beräkna flödesintegralen $\displaystyle\iint_S \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$, där vektorfältet $\mathbf{u} = (x^3,\ y^3,\ z^3)$, S är den slutna yta som begränsar halvklotet $\left\{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0\right\}$ och $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till ytan S.

DEL2:

11. Vilka värden kan linjeintegralen $\oint_C (y - 2x^2)dx + (xy^2 - 3x)dy$ anta om C är en enkel sluten kurva som genomlöps ett varv i positiv led?

12.a) Låt en oändlig ortogonal följd av funktioner vara given på intervallet $[a,b]$.
Låt vidare $y = f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$.
Bestäm f :s utveckling i den ortogonala funktionsföljden.

b) Utveckla $f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ \pi - x , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ i funktionsföljden $\{1,\ \cos nx,\ \sin mx\}$, $n = 1,2,3,..,\ \ m = 1,2,3,\ldots$.

c) Bestäm seriens värde för $x = 0$.

13. Härled utgående från definitionen Laplacetransformationen för funktionen $f_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h} , & a \le t \le a+h \\ 0 , & t < a ,\ t > a+h \end{cases}$.

Benämn denna transformation $L\{f_h(t)\}$. Låt $h \to 0$, dvs bestäm gränsvärdet $\lim_{h \to 0} L\{f_h(t)\}$.

Lös slutligen begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 8y = f(t)$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$, då $f(t) = \lim_{h \to 0} f_h(t)$.

Omkastning av gränsövergång och integration förutsättes tillåten.

14. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Härled en partikulärlösning till det inhomogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$