Gymnasiets nationella prov och KTHs förkunskapskrav – en matematisk kulturklyfta?

Hans Thunberg, KTH Matematik
thunberg@math.kth.se

Sammanfattning. Det nationella provsystemet har bl a som uppgift att tydliggöra kursplanernas mål. I denna rapport görs en jämförelse mellan uppgifterna på två årgångar av nationella prova i matematik får gymnasiet och de förväntningar högskolan (KTH) har på nyantagna teknologers matematikkunskaper. Skillnaden i synen på vad som konstituerar matematiskt kunskap är stor. Hantverkskunnande i form av räknefärdighet och formelkunskap utgör i högskolans perspektiv en omistlig del av matematiskt förmåga och förståelse, medan de nationella proven närmast tycks betrakta beräkningar och formler som onödiga svårigheter att undvika på vägen mot förståelse.

Bakgrund

Det är väl dokumenterat att nyantagna studenter presterar allt sämre på de förkunskapstest som ges vid flera av landets tekniska högskolor (Brandell 2004, Bylund och Boo 2003, Högskoleverket 1999, Pettersson 2003, Skolverket 1998). Försämringen sker i stort sett på alla uppgiftstyper och i alla betygskategorier. Det är därför naturligt att fråga sig hur gymnasieskolans mål och högskolans förväntningar i matematik egentligen passar ihop. Som ett led i ett större projekt som adresserar denna fråga gör vi här en enkel jämförelse mellan KTHs förkunskapskrav i introducerande och repeterande kursmaterial och gymnasiets mål så som de kommer till uttryck i de nationella proven. En likartad jämförelse mellan nationella prov och det förkunskapstest som ges vid Chalmers har tidigare gjorts i två studentuppsatser (Bratt 2004) och (Jingulescu 2004), där man också gör jämförelser med övningsuppgifterna i två av de vanligaste läromedlen för gymnasiet.

Gymnasiets mål – de nationella proven

På skolverkets hemsida http://www.skolverket.se, under länken *Nationellt provsystem*, kan man läsa att det nationella provsystemet, som för gymnasiets matematik består av nationella prov samt en provbank med uppgifter, syftar till bl a att *”förtydliga målen och visa på elevers starka och svaga sidor”* och *”konkretisera kursmål och betygskriterier”*. Det är därför rimligt att se på de nationella proven som auktoritativ uttolkning av gymnasiets mål. Vid diskussioner med gymnasielärare har det också framkommit att de nationella provens utformning har en starkt styrande inverkan på prioriteringar och kunskapsmål i gymnasiets matematik-undervisning.

Som underlag har vi två offentliggjorda årgångar av de nationella proven i matematik, 2002 och 2005, för kurs A, B, C och D. Proven till kurs A konstrueras av PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm, och proven till kurs B – D görs av Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar vid Umeå Universitet. Proven kan nås via Skolverkets hemsida, eller direkt på http://www.umu.se/edmeas/np/information/np-tidigare-prov.html .

KTHs förväntningar på nya studenters matematikkunskaper

Exempel på högskolans förväntningar är hämtade från en genomgång av KTHs frivilliga introduktionsmaterial för studenter som började på KTH hösten 2004 (Filipsson och Thunberg 2005). *KTHs sommarmatematik* är ett nätbaserat självstudiematerial som alla nyantagna studenter rekommenderades att ta del av under sommaren innan de började vid KTH. Kursmaterialet publicerades på hemsidan för KTH Matematik och återfinns för närvarande under adressen http://www.math.kth.se/SMK4/ . *Introduktionskurs i matematik, 1p*, är en icke-obligatorisk matematikkurs som ges under mottagningsveckorna för de nyantagna studenterna. Som kurslitteratur användes 2004 de fem första kapitlen i *Mot bättre vetande i matematik* (Dunkels m fl 2002). Läsanvisningar till denna kurs finns också på KTH Matematiks hemsida, för närvarande under adressen http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1120/200405/ .
De valda exemplen ur KTH-materialet är typiska i den meningen att de behandlar stoff som är prioriterat i de introducerande kurserna och att svårighetsgraden och komplexiteten är representativ.

Avgränsning

Detta arbete gör på intet sätt anspråk på att vara en uttömmande utvärdering av de nationella proven. Vi fokuserar enbart på de aspekter som av högskolan pekas ut som viktiga förkunskaper i de förberedande kurserna – det handlar till stor del om räknefärdighet och kännedom om elementära funktioner.

Som vi ska se har de nationella proven ett mycket stort mått av uppgifter som testar förståelse och förmågan att tolka matematiska påståenden (ofta med ett minimum av beräkningar). Denna typ av uppgifter är sällsynta i KTHs introduktionsmaterial. Det ska inte tas som uttryck för att högskolan anser det oviktigt med begreppsförståelse, men det är inte det som prioriteras i repetitions- och introduktionsmaterial.

Kanske kan man uttrycka det så att högskolan betraktar ett visst mått av räknefärdighet och kunskap som ett *nödvändigt* villkor för att kunna följa kurserna vid högskolan, och att denna kompetens är den som det är mest angeläget att repetera initialt. Då de nationella proven kan antas bidra till att definiera agendan för gymnasiets matematikundervisning är det därför relevant att se vilka krav dessa ställer inom detta begränsade område.

Metod – fem problematiska områden

Vi har valt ut fem områden där vi tidigare har observerat stora skillnader mellan högskolans förväntningar och de nyantagna studenternas kunskaper: numerisk räkning, algebraiska förenklingar, ekvationslösning, logaritmer och trigonometri. Inom vart och ett av dessa fem områden ger vi typiska exempel från KTH-materialet och jämför dessa med de färdigheter som efterfrågas på de nationella proven. Samtliga KTH-uppgifter är tänkta att lösas utan räknare, och vi studerar därför vilka krav som ställs vid de nationella proven på förmågan att göra beräkningar utan räknare. Vi har gått igenom samtliga uppgifter på de nationella proven på kurs A – D från åren 2002 och 2005, och har även tagit hänsyn till färdigheter som krävs för beräkningar av delresultat i uppgifter som huvudsakligen skulle falla under en annan kategori. De mest beräkningsmässigt krävande exemplen (av dem som skall beräknas för hand utan hjälpmedel) ifrån de nationella proven i varje kategori redovisas.

Vid de nationella proven har eleven tillgång till speciellt utformade formelsamlingar, tillgängliga från samma webbsida som proven, som innehåller alla nödvändiga formler. I KTHs inledande kurser finns formler tillgängliga i litteraturen under kursens gång, men vid provtillfällen förväntas studenten kunna eller kunna härleda alla nödvändiga formler.

Resultat

Numerisk räkning

Exempel från KTHs introduktionsmaterial

K 1. Beräkna $\dfrac{2-\dfrac{2}{9}}{\dfrac{8}{9}}$.

K 2. Beräkna $\dfrac{\left(3^{-4}\right)^{(-5)}}{243^3}$.

K 3. Förenkla $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$.

Uppgifter från de nationella proven

N 1. Vad är hälften av $1\frac{1}{2}$? (Kurs A 2002)

N 2. Placera talen 25, 102 och 0.1 i rutorna så att resultatet blir så stort som möjligt $\dfrac{[\ ]-[\ ]}{[\ ]}$. (Kurs A 2005)

N 3. Beräkningar av en bestämd integral leder i sista ledet fram till $\dfrac{3^3}{3}-3-\dfrac{1}{3}+1$.

(Kurs D 2005)

Kommentar

Dubbelbråk samt beräkningar med potensuttryck och rötter är vanligt förekommande i högskolans introduktionsmaterial. Ingen av dessa uppgiftstyper förekommer på de granskade nationella proven.

Färdigheterna som efterfrågas på de nationella proven är av uppenbart lägre komplexitet. Anmärkningsvärt är att vi inte fann några exempel från proven på kurs B och C, och endast elementära exempel från kurs D, i denna kategori. Det är väsentligen endast provet på gymnasiets första kurs, kurs A, som kräver kunskaper i numerisk räkning, och det av mycket elementär karaktär.

Algebraiska förenklingar

Exempel från KTHs introduktionsmaterial

K 1. Förenkla $(p+q)(p-q)-(p-q)^2$.

K 2. Förenkla $\dfrac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}$.

K 3. Sätt följande uttryck på gemensamt bråkstreck

$$\frac{a+2b}{1+\dfrac{1}{cx-1}}+\frac{2a+b}{1-\dfrac{1}{cx-1}}.$$

Uppgifter från de nationella proven

N 1. Förenkla $(x-4)^2-16$. (Kurs B 2005)

N 2. Förenkla $x(2x+5)-2(x+3)$. (Kurs B 2005)

N 3. Använd konjugatregeln och förenkla $\dfrac{a+3}{a^2-9}$. (Kurs C 2005)

N 4. I en problemuppgift (den sista på provet) leds man i sista steget till att förenkla

$2\left(bx-a\dfrac{x^3}{3}\right)$ när $x=\sqrt{b/a}$. (Kurs D 2005)

Kommentar

Uppgifterna på de nationella proven, med undantag N 4, har en betydligt lägre grad av beräkningsmässig komplexitet än vad studenterna förväntas kunna hantera när de börjar på KTH. Man skall också komma ihåg att vid de nationella proven har eleverna tillgång till formelsamlingar som innehåller alla nödvändiga identiteter, medan de vid KTH förväntas kunna lösa uppgifterna utan formelsamling.

De valda exemplen från de nationella proven kommer alla från 2005. D-provet från 2005 innehåller också en uppgift där man skall omforma enklare polynom och rationella uttryck i sinus och cosinus. På proven från 2002 förekommer på B-kursens prov uppgifter snarlika de två första exemplen från 2005, medan proven från kurs C och D 2002 inte alls innehåller uppgifter som testar denna typ av färdigheter.

Ekvationslösning

Exempel från KTHs introduktionsmaterial

K 1. Lös ekvationen $\dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{6x}=\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{3x}$.

K 2. Lös ekvationen $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-9}$.

K 3. Lös ekvationen $6^{x+1}+6^{x-3}=222$

Uppgifter från de nationella proven

N 1. Lös ekvationen $\frac{x-0.2}{0.1}=1$. (Kurs A 2002)

N 2. Lös ekvationen $10=\frac{10^3}{10^x}$. (Kurs A 2005)

N 3. Lös ekvationen $x^2+2x-8=0$ (Kurs B 2005)

N 4. Lös ekvationen $x^3-x(8x-16)=0$. (Kurs C 2005)

Kommentar

KTH-materialet innehåller också linjära ekvationer och polynomekvationer, även av högre svårighetsgrad än de som återfinns på de nationella proven. Däremot finns inga uppgifter på de granskade nationella proven på rationella ekvationer, rotekvationer eller ekvationer som kräver substitutioner, endast ekvationer av de angivna typerna förekommer bland de uppgifter som skall lösas för hand. Notera att de två första exemplen N1 och N2 från de nationella proven är utformade så att beräkningarna utan större svårighet kan göras i huvudet, om man har förstått ekvationernas innebörd. Det tredje exemplet, en andragradsekvation, kan lösas med den generella formeln som finns i formelsamlingen till provet. Det fjärde exemplet N4 är intressant, eftersom det uppvisar en något högre grad av beräkningskomplexitet än vad som är brukligt på de nationella proven, och också på ett direkt sätt testar kunskaper från gymnasiets tidigare kurser (andragradsekvationer hör närmast till Kurs B).

Logaritmer

Exempel från KTHs introduktionsmaterial

K 1. Bestäm $\ln\frac{1}{e}+2\ln\sqrt{e}$.

K 2. Lös ekvationen $\ln x+\ln(x+4)=\ln(2x+3)$.

Uppgifter från de nationella proven

N 1. Vilket av följande tal är det bästa närmevärdet till $\lg 80$?

A) 0.8 B) 0.9 C) 1.9 D) 2.9 E) 8.0 F) 800 (Kurs C 2002)

N 2. En deluppgift i ett tillväxtproblem leder till att man med räknarens hjälp skall bestämma t så att $95e^{-0.65t}=70$. (Kurs C 2002)

N 3. En integralekvation leder till att man skall lösa ekvationen $\ln a-\ln 1=\ln 2$. (Kurs D 2002)

Kommentar

De nationella proven från 2005 innehåller också uppgifter av liknande N1 och N2. Den typ av färdigheter som krävs för att lösa KTH-exemplen testas inte alls på de nationella proven från 2002 och 2005. Tillväxtproblem snarlika dem på de nationella proven förkommer i litteraturen till KTHs introduktionskurser (men inte bland de rekommenderade uppgifterna), medan uppgifter av typen N 1 inte förekommer i KTH-materialet.

Trigonometri

Exempel från KTHs introduktionsmaterial

K 1. Studenterna förväntas känna till begreppen *amplitud, frekvens* och *fas,* och veta hur dessa relateras till grafens utseende.

K 2. Bestäm det exakta värdet av $\cos\left(13p + \frac{35p}{6}\right)$.

K 3. Lös ekvationen $\cos 4x = 1/2$.

K 4. Lös ekvationen $\sin 2x - 4\cos x = 0$.

K 5. Visa att för alla v gäller att $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$.

Uppgifter från de nationella proven

N 1. Vilken eller vilka av nedanstående uppgifter har två lösningar i intervallet $0 \le x \le p$?

A: $\cos x = -0.3$

B: $\sin x = 0.8$ (Kurs D 2002)

N 2. Visa att $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$. (Kurs D 2002)

N 3. Ordna följande tal i storleksordning

$a = \sin 24^\circ$, $b = \cos 100^\circ$, $c = \sin 165^\circ$. (Kurs D 2005)

N 4. I triangeln ABC är vinkeln $A = 90^\circ$. Visa att $\sin B = \cos C$. (Kurs D 2005)

N 5. Bestäm samtliga lösningar till $\sin 3x = 0.421$. (Kurs D 2005)

N 6. Ett par problemuppgifter som kräver tillämpningar av sinus-, cosinus- och area-satsen förekommer både 2002 och 2005 på D-kursens prov.

N 7. En annan vanligt förekommande uppgiftstyp är att bestämma konstanter A och k sådana att funktionen $y = A\sin kx$ har en given graf.

Kommentar

Rent generellt ägnas trigonometrin stort utrymme på proven i kurs D, och uppgifterna är ofta ambitiösa och målen är relativt högt ställda. Uppgifter av typen N7 är vanliga på de nationella proven, men har ingen central roll i KTH-materialet. Uppgifter av typen K 4 förekommer inte på de nationella proven. Härledningen K 5 kräver flera steg, med hjälp av standardidentiteter, medan N 2, som formellt är snarlik, visas med en substitution i en standardidentitet i formelsamlingen (”halva-vinkel formeln”) och en enkel omskrivning. Tillgången till formelblad vid de nationella proven underlättar förstås denna typ av uppgifter betydligt.

Flera av uppgifterna på de nationella proven, som N 1, N 3, och N 5, kräver liksom K 2, K 3 och K 4 förmåga att resonera med hjälp av de trigonometriska funktionernas definitioner på enhetscirkeln; erfarenheten från KTHs inledande kurser är att många studenter saknar den förståelse som krävs för den typen av resonemang.

Kommentarer och slutsatser

Överlag förväntar sig högskolan ett betydligt större mått av räknefärdighet inom de studerade områdena än vad som efterfrågas på de nationella proven. I de tidigare nämnda arbetena (Bratt 2004) och (Jingulescu 2004) kommer man till samma resultat. De nationella provens uppgifter ger, med enstaka undantag, intrycket av att vara utformade för att undvika all beräkningsmässiga svårigheter; de koncentrerar sig på elementär begreppsförståelse och problemlösning, där grafritande räknare kan användas för numeriska beräkningar och grafiska undersökningar. Räknefärdighet och kännedom om formler och standardidentiteter för elementära funktioner testas inte alls.

Vår jämförelse stödjer hypotesen att de nationella proven styr undervisningen i matematik på gymnasiet mot minskad tonvikt på många av de kunskaper och färdigheter som av högskolan betraktas som väsentliga förkunskaper. Uppgifterna från 2005 års prov innehåller en något större betoning på räknefärdighet, men diskrepansen är ändå stor.

Inom trigonometri finner vi en mindre diskrepans än inom de övriga områdena, och de nationella proven ställer höga krav på begreppsförståelse. Likväl har många studenter stora svårigheter med den inledande trigonometrin vid högskolan. Det finns naturligtvis andra betydelsefulla faktorer som styr elevernas lärande på gymnasiet. En större undersökning av hur gymnasiets läromedel förhåller sig till de nationella proven och till högskolans förkunskapskrav vore av intresse.

Utvärdering av undervisningen med nationella prov?

I de ovan citerade målen för det nationella provsystemet står det också att det ska *”ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapsmålen nås på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå”.* Ett naturligt sätt att göra detta på nationell nivå vore med longitudinella jämförelser; eftersom många av proven är hemligstämplade kan man utgå ifrån att uppgifter återanvänds, så underlag för sådana studier borde finnas. I ljuset av alla rapporter de senaste åren om försämrade matematikkunskaper i grund- och gymnasieskolan, vore sådana undersökningar av uppenbart intresse. Redan i *Förkunskapsproblem i Matematik?* (Skolverket 1998) diskutera möjligheten till sådana uppföljningar; där hänvisas också till att detta är något som riksdagens revisorer vid ett flertal tillfällen har efterlyst. Vi har inte funnit några sådan publicerade studier.

De nationella proven uttrycker högt uppsatta mål för begreppsförståelse och förmåga att tolka matematiskt formulerade utsagor om tillämpade problem. Uppgifterna är ofta utformade på ett sådant sätt att man inte kan kompensera bristande förståelse med kalkylerande. Dessa kompetenser testas i mycket ringa utsträckning på högskolornas förkunskapstester, dessa ger följaktligen inte mycket information studenternas tidigare lärande i detta avseende. Sammanställningar av prestationer på de nationella proven, och hur dessa har utvecklats över tiden vore därför även av detta skäl av mycket stort intresse.

Referenser

Brandell, Lars (2004). *Matematikkunskaperna 2004 hos nybörjarna på civilingenjörs-programmen vid KTH.*

Bratt, Peter (2004). *Algebra – En undersökning av gymnasiekurslitteraturen och nationella prov inför högskolestudier i matematik.* C-uppsats i matematik. Karlstads Universitet.

Bylund, Per och Boo, Per-Anders (2003). Studenters förkunskaper. *Nämnaren* nr 3, 2003.

Dunkels, Andrejs et. al. (2002). *Mot bättre vetande i matematik, 3:e upplagan*. Studentlitteratur. Lund.

Filipsson, Lars och Thunberg, Hans (2005) *Förväntade och önskade förkunskaper i Matematik vid KTHs civilingenjörsutbildningar.* KTH.

Högskoleverket (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?*

Jingulsecu, Gabriella. *Geometri – En undersökning av två läroböcker för gymnasiet och nationella prov inför högskolestudier i matematik.* Examensarbete.

Petterson, Rolf (2003). *Resultat av diagnostiska prov i matematik för nyantagna teknologer vid civilingenjörslinjerna Chalmers, 1973 – 2003.*

Skolverket (1998). *Förkunskapsproblem i matematik?*