

# En studie av fel på tentamen 2004-08-27 i 5B1120 Introduktionskurs i matematik, 1 poäng

Mikael Cronhjort, KTH Matematik  
[mikaelc@math.kth.se](mailto:mikaelc@math.kth.se)

## Inledning

Denna studie utgör en del av projektet *Gymnasieskolans mål och högskolans förväntningar*. Syftet med projektet är att kartlägga studenternas kunskapsnivå när de börjar sina högskolestudier, och jämföra denna nivå med vad KTH i de första matematikkurserna förutsätter att studenterna kan. I denna studie vill vi undersöka kunskapsnivån genom att studera vilka fel en grupp studenter på Öppen Ingång har begått på tentamen i introduktionskursen i matematik. I projektet ingår även andra studier av fel i studenters lösningar, t.ex. det arbete som studenterna Emma Enström och Sara Isaksson har gjort om fel på tentamen i kursen *Matematik 1*.

Ett naturligt sätt för en lärare att utvärdera hur studenterna har mottagit undervisningen i en kurs är att studera vilka fel de gör på tentamen. Ofta gör man detta helt informellt i samband med att man rättar tentamen. Om man försöker göra detta mera formellt, kan man studera lösningsfrekvenser för de olika uppgifterna. En sådan studie kan visa hur olika kursavsnitt har fungerat. Fördelar med en sådan studie är att resultatet blir objektivt och kvantitativt. En nackdel är att lösningsfrekvenserna inte kan visa varför studenterna har haft svårigheter med uppgifterna. Man vet efter en sådan studie vad som skall fungera bättre, men inte hur man skall uppnå att det fungerar bättre. För att få närmare information om varför studenterna inte har lyckats lösa uppgifterna, kan man försöka avgöra vad deras fel beror på. Detta är betydligt svårare, eftersom studenternas fel i regel kan tolkas på flera olika sätt. Den som gör studien måste ofta gissa hur studenterna har resonerat. Resultatet blir subjektivt, eftersom det är en tolkning. Ett alternativ för att få ett mera detaljerat och nyanserat resultat kan vara att intervjua studenterna, men detta kräver en betydligt större arbetsinsats, och resultatet är fortfarande en tolkning.

Denna studie omfattar dels en kvantitativ analys baserad på lösningsfrekvenser, dels en kvalitativ analys med fokus på varför studenterna inte har klarat av att lösa uppgifterna. Dessa resultat bygger inte på några intervjuer, utan bara på studenternas inlämnade skriftliga lösningar. I den kvalitativa analysen är målet att så noga som möjligt beskriva de fel som studenterna har gjort, samt reflektera över varifrån de observerade bristerna härstammar.

## Material

Denna studie omfattar de fel som studenterna på Öppen Ingång har gjort på tentamen 2004-08-27 i kursen 5B1120 Introduktionskurs i matematik, 1 poäng. Tentamen gavs i

två versioner, och denna studie omfattar endast version A. Det ger ett material som omfattar 52 studenters lösningar till de 9 uppgifter som fanns på tentamen.

Uppgifterna på tentamen var:

1. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt  $(x + 3)^2 - x^2$ .
2. Kvadratkomplettera uttrycket  $x^2 + 6x - 7$ .
3. Lös ekvationen  $x^2 + 4x - 7 = 0$ .
4. Förenkla uttrycket  $\frac{\sqrt{a^3} \cdot a^{5/2}}{a^2}$ .
5. Lös ekvationen  $5 = 3^x$ .
6. Lös ut  $t$  ur formeln  $T = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi}}$ .
7. Vad är  $\sin v$  då  $\cos v = -1/3$ ,  $0 < v < \pi$ ?
8. Lös ekvationen  $\cos 2x = \cos x$ .
9. Rita kurvan  $(x + 3)^2 + y^2 = 9$ .

Skrivtiden var 60 minuter, och inga hjälpmedel var tillåtna. Man kunde få 1p per uppgift och för godkänt krävdes 6p.

### Kvantitativ analys

Lösningsfrekvenserna för de respektive uppgifterna var:

Uppgift nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antal felaktiga lösn	2	16	9	12	11	10	27	37	19
Lösningsfrekv (%)	96	69	83	77	79	81	48	29	63

Man kan notera att nästan alla klarade att lösa den första uppgiften. Uppgifterna 2 – 6 löstes av cirka 70 – 80 procent av studenterna. Uppgifterna 7 och 8 gick sämst, och löstes av mindre än hälften av studenterna. Dessa uppgifter handlar om trigonometri. Uppgift 9, som handlar om att rita en cirkel utifrån en given ekvation, innebar också problem för många studenter. Den löstes av cirka två tredjedelar av studenterna. Den genomsnittliga lösningsfrekvensen är 69%.

### Kvalitativ analys

För att identifiera viktiga fel som begås av många studenter kan det vara en hjälp att kategorisera felen. Fel är i allmänhet svåra att kategorisera. För det första måste man alltid göra en subjektiv tolkning av studentens lösning. För det andra går fel att beskriva på många olika sätt, och ur olika synvinklar. En metod för kategorisering är att utgå från de uttolkade kompetenser som Palm m.fl. definierar [1]. Det arbete som CL-studenterna Emma Enström och Sara Isaksson har gjort inom ramen för detta projekt utgår från dessa kompetenser.

En annan metod är att i likhet med Ljung m.fl. försöka kategorisera felen oberoende av

vilken kompetens de visar brister inom [2]. Detta tillvägagångssätt har använts i denna studie. Kategoriseringen grundas enbart på likheter mellan beskrivningarna av felen. Efter kategoriseringen analyseras vilka brister felen avslöjar inom de respektive kompetenserna, eller i matematiska ämnesområden, eller om man kan dra några andra slutsatser av felen.

Det är viktigt att komma ihåg att kategoriseringen inte är ett mål i sig, utan ett hjälpmedel för att kunna hantera en stor mängd data. Eftersom kategoriseringen är subjektiv, så kan studier gjorda av olika personer skilja sig mycket på den här punkten. Det viktiga är emellertid analysen av felen och de slutsatser man drar. Dessa kan bli likartade trots olika metoder för kategorisering.

Ibland kan man inte uttala sig om varför en student inte har klarat av att lösa en uppgift, exempelvis då studenten inte har skrivit någonting. Ur den kvalitativa analysens synvinkel är sådana fel ointressanta, och exkluderas därför här. Vi fokuserar istället på sådana fel där det som studenten har skrivit på något sätt belyser varför studenten har misslyckats med att lösa uppgiften. I något fall innehåller en lösning flera olika fel som kan beskrivas. Då inkluderas alla felen i analysen. Materialet omfattar 52 tentamina à 9 uppgifter, vilket ger ett totalt antal uppgifter som är 468. Av dessa är 143 uppgifter felaktigt lösta. Bland dessa har 94 fel kunnat beskrivas.

Beskrivningen av fel gör inga anspråk på att bli uttömmande, och alla fel kan inte omnämnas här. Fokus ligger på sådana fel som antingen har gjorts av ett antal studenter, eller på enstaka fel som är viktiga för tolkningen av hur en student har resonerat. Bland de beskrivna felen har följande kategorier definierats:

*Trigonometri*

*Potenser*

*Logaritmer*

*Felaktig, omotiverad formel*

*Bristande räknefärdighet*

*Hantering av ekvationer eller uttryck*

Observera att dessa kategorier är av olika karaktär. De tre första utgör ämnesområden, medan de tre sista är relaterade till studentens resonemang och arbetssätt. Ett fel kan passa in under flera olika kategorier. Exempelvis kan ett visst fel omfatta både trigonometri och en felaktig, omotiverad formel. I sådana fall har felet kommenterats under alla de kategorier som felet passar in under. I detta sammanhang är huvudsyftet att beskriva felen kvalitativt, snarare än att kvantisera hur vanligt ett särskilt fel är, även om en del noteringar av kvantitativ karaktär förekommer.

### Trigonometri

Uppgifterna om trigonometri var de som hade lägst lösningsfrekvens. Av de beskrivna felen har 33 sorterats under kategorin trigonometri, dvs. cirka en tredjedel. Bland dessa kan man urskilja följande typer av fel:

En vanlig feltyp är att studenten missar att ekvationer av typen  $\cos x = k$  har två lösningar

per varv. Denna typ av fel förekommer 10 gånger. Felet visar sig i lösningarna till uppgift 7, men även i uppgift 8, där många studenter hävdar att ekvationen  $\cos 2x = \cos x$  medför att  $2x = x$ , utan att tänka på periodiciteten eller att det finns lösningar för  $-2x = x + 2\pi n$ .

En annan framträdande feltyp av allvarlig art som gäller trigonometri är att studenten inte skiljer på vinklar och cosinus av vinklar, t.ex. på  $\cos x$  och  $x$ . Studenten kan skriva t.ex.  $\cos x = 60^\circ = 1/2$ . Fel där cosinus av en vinkel sätts lika med en vinkel förekommer i 7 fall. Fel av denna typ skulle också kunna beskrivas som bristande hantering av ekvationer och uttryck.

En del studenter påstår att sinus eller cosinus i något fall har ett värde som är större än 1. Detta fel förekommer 4 gånger.

### Potenser

16 av de beskrivna felen handlar om potenser och potenslagar.

Ett vanligt fel, som förekommer 9 gånger, är att studenterna inte vet hur man skall skriva  $\sqrt{a^3}$  som en potens. Följande varianter förekommer i studenternas lösningar:

$$\sqrt{a^3} = a^{1/3}$$

$$a^{5/2} = 5a^2$$

$$\sqrt{a^3} = a^{2/3}$$

$$\sqrt{a^3} = a^{(3-1)}$$

$$\sqrt{a^3} = a^2$$

$$\sqrt{a^3} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt{a^3} = (a^3)^{1/3}$$

Det är uppenbart att studenterna inte är vana att omvandla ett rotuttryck till ett potensuttryck.

Två studenter missar att kvadraten av ett negativt tal blir positiv.

### Logaritmer

12 av de beskrivna felen handlar om logaritmer. Felen vittnar tydligt om att många studenter inte behärskar logaritmlagarna. Dessa fel skulle också i stor utsträckning kunna beskrivas som användande av felaktiga, omotiverade formler. Jag ger här några exempel på påståenden som studenterna har skrivit:

$$\ln 5 / \ln 3 = \ln (5-3)$$

$$\ln 5 / \ln 3 = \ln 5 - \ln 3$$

$$\ln (T\pi^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln (T\pi)$$

$$\ln (a / b) = \ln a / \ln b$$

$$\ln e = e$$

$$\ln T \cdot \ln \sqrt{\pi} = T\pi$$

### Felaktig formel

Ett mycket stort antal fel beror på att studenterna använder felaktiga formler. Dessa formler kan gälla trigonometriska relationer, lösningarna till en andragradsekvation, potens- eller logaritmlagar, Pythagoras sats m.m. Studenterna prövar inte om en formel som de tror sig komma ihåg kan vara giltig. Eftersom gränsdragningen för denna felkategori är svår att göra, är det meningslöst att försöka ange hur många gånger detta fel har förekommit.

Anmärkning: Denna felkategori hänger ihop med en kulturkrock mellan gymnasiet och högskolan. På gymnasiet är studenterna vana att använda formelsamling. Därför är de inte vana att behöva härleda eller komma ihåg formler, eller kunna avgöra om en formel kan vara riktig.

### Bristande räknefärdighet

Ett stort antal fel beror på rena räknefel. Hit räknar vi t.ex. de fyra räknesätten, felaktiga kvadreringar, tappade minustecken, m.m. Det mest förvånande är dock ett antal fall där studenterna inte inser att eller hur de kan förenkla elementära uttryck:

*Några exempel där en kvot i kvadrat förenklas genom att utföra divisionen innan kvadreringen:*

*Exempel 1:* Studenten har kommit fram till uttrycket  $\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 7$ , och beräknar detta till  $36 / 2 - 14 / 2$ . Om studenten istället hade utfört divisionen först, så skulle det kanske ha blivit rätt:  $\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 7 = 3^2 - 7 = 9 - 7 = 2$

*Exempel 2:* Studenten vill förenkla uttrycket  $\frac{a^{8/2}}{a^2}$  och kommer fram till  $\frac{\sqrt{a^8}}{a^2}$  där det tar stopp. Även här verkar det rimligt att studenten hade kommit längre genom att börja med divisionen:  $\frac{a^{8/2}}{a^2} = \frac{a^4}{a^2} = a^2$ .

*Exempel 3:* Studenten har misslyckats med samma uppgift genom att skriva  $\frac{a^{8/2}}{a^2} = a^{8/2} - a^2$ . Det blir enklare om man dividerar först.

*Exempel 4:* Studenten beräknar  $\left(\frac{4}{2}\right)^2$  till  $8 / 4$ . Om studenten hade dividerat före

kvadreringen hade det antagligen gått bättre:  $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$ .

*Några exempel med potenser, exponentialfunktioner och kvadratrötter:*

*Exempel 5:* Studenten skriver att  $e^{-2t} = t e^{-2}$ . Två studenter gör detta fel.

*Exempel 6:* Studenten skriver att  $3^x = 3x$ . Är detta bara slarv, eller är det okunskap? Hur snabbt kan man glömma vad man håller på med?

*Exempel 7:* Två studenter påstår att  $\sqrt{11} = 3\sqrt{2}$ .

### Hantering av ekvationer eller uttryck

Ett framträdande fel är att studenter blandar ihop förenkling av uttryck och lösning av en ekvation. Studenterna verkar inte ha klart för sig vad de håller på med. Exempel:

En student skall lösa en ekvation. Studenten förenklar vänsterledet, men använder aldrig högerledet. Som svar presenteras det förenklade vänsterledet.

En annan student skall genomföra en kvadratkomplettering. Studenten bildar en ekvation av uttrycket genom att sätta det lika med noll, och löser sedan ekvationen.

En student skall förenkla ett uttryck, och har kommit fram till  $6x+9$ . För att ”förenkla vidare delar studenten med 3, och skriver alltså  $6x+9 = 2x+3$ . En annan student ”förenklar” samma uttryck genom att sätta det lika med noll, och bestämmer sedan  $x$  till  $-3/2$ .

Även ett av felen som finns beskrivet i avsnittet om trigonometri kan tolkas som att studenten inte är klar över skillnaden mellan ekvationslösning och förenkling. Studenten skrev  $\cos(x) = 60^\circ = 1/2$ .

### **Diskussion och slutsatser**

Materialet omfattar 52 tentamina. Det betyder att om fem studenter begår ett särskilt fel så motsvarar det omkring 10 % av studenterna som ingår i studien. Eftersom materialet som studien baserar sig på är ganska litet och bara kommer från ett studieprogram på KTH, så kan man inte dra någon säker slutsats om hur stor andel av studenterna på KTH som skulle göra detta fel. Andelen varierar säkert från program till program. Det program som studien baserar sig på är Öppen ingång, vilket innebär att studenterna senare väljer vilket program de vill gå. Man hittar alltså dessa studenter på alla program senare, men man kan ändå inte hävda att de skulle representera alla program, eftersom det inte finns någon anledning att tro att t.ex. de studenter från Öppen ingång som senare väljer programmet Elektroteknik skulle representera den genomsnittliga studenten på Elektroteknik. Men syftet med denna studie är inte att kunna fastslå hur många som gör vissa fel, utan att identifiera viktiga fel som förekommer. Om fem av de 52 studenterna som studien baserar sig på har gjort ett fel så är det tillräckligt många för att man kan säga

att det är ett fel som många gör. Dessutom måste man tänka på att vi inte har kunnat beskriva alla fel. De fel som vi inte har kunnat beskriva döljer sannolikt ytterligare exempel på liknande brister. De svagaste studenterna kanske inte lämnar in något lösningsförslag alls.

Trigonometri är ett område som många studenter har arbetat med på gymnasiet, men inte tillräckligt mycket för att behärska det väl. Många studenter uttrycker i undervisnings-situationer att trigonometriska ekvationer är svåra. Detta avspeglas tydligt av lösningsfrekvenserna på uppgifterna om trigonometri. Det är uppenbart att många har problem på detta område, och den kvalitativa analysen visar att många studenter saknar även de mest grundläggande kunskaperna om de trigonometriska funktionerna. En slutsats kan vara att man på KTH måste ägna mera tid åt de trigonometriska funktionerna i matematikundervisningen.

Potenser och logaritmer verkar också vara områden som studenterna inte behärskar så väl som man på KTH önskar. Man kan tycka att det som studenterna faller på är ett ganska isolerat fel, när de misslyckas att omvandla en kvadratrots till en potens. Men den stora mängd varianter som finns föreslagna i studenternas lösningar visar en stor generell osäkerhet om hur man skall hantera potenser, eller kanske formler i största allmänhet. Detta hänger samman med den kategori som kallas användande av felaktiga, omotiverade formler. Om studenterna vore mera vana vid att avgöra om en formel som de tror sig minnas kan vara riktig, skulle de kanske kunna klara av både potenser och logaritmer bättre. En slutsats kan vara att man på ett tidigt stadium i matematikundervisningen bör prata om formler. Studenterna kan behöva reflektera över vad det innebär att en formel är sann, giltig, eller falsk. Man kan också ta upp vad det innebär att bevisa eller falsifiera en formel. Det vore nog också bra att i en inledande kurs behandla både potenser och logaritmer från början.

De fel som här beskrivs som bristande räknefärdighet eller hantering av ekvationer och uttryck verkar vara allvarliga. De visar på grundläggande brister i många studenters begrepps- och kommunikationskompetens, definierade enligt [1]. Dessa brister har i många fall sannolikt sitt ursprung i missförstånd eller luckor redan under grundskoletiden. Många studenter verkar osäkra över likhetstecknets funktion, och över ekvationslösning i allmänhet. Det är mycket svårt att uppskatta hur många studenter det kan handla om, men en gissning kan vara mellan 10 och 20 procent av studenterna. En slutsats kan vara att studenterna behöver använda matematik mera, och att presentationen av matematiska resonemang måste lyftas fram mera i undervisningen.

## Referenser

1. Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, I., Hellström, T. och Häggström, C-M.: *En tolkning av målen med den svenska gymnasimatematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*. Umeå Universitet, Pm nr 199 (2004).
2. Ljung, B-O., Oscarsson, E. och Rosén, B.: *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på treåriga gymnasielinjer*. Rapport från PRIM-gruppen nr 7, LHS, Stockholm (1991).

