

Lärares och studenters syn på KTHs Introduktionskurs i Matematik

Hans Thunberg, KTH Matematik
thunberg@math.kth.se

Lars Filipsson, KTH Matematik
lf@math.kth.se

1 Bakgrund

Inom ramen för projektet *Gymnasieskolans mål och högskolan förväntningar* har vi studerat *Introduktionskurs i Matematik, 5B1120*. Kursen, som ger en studiepoäng, ges under mottagningsveckorna vid KTH. Den är frivillig, men de allra flesta studenter väljer att följa kursen.

Denna kurs utgör de nyantagna studenternas första möte med matematikundervisningen vid KTH. Kursen utgör en snabb genomgång av en lång rad färdigheter i matematik (se Filipsson och Thunberg 2005). Kursens utformning och roll antyder att det behandlade stoffet är sådant som vi på KTH Matematik anser som viktiga färdigheter och förkunskaper för de kommande obligatoriska matematikkurserna, och också att detta stoff till största delen skall vara välbekant för de nya studenterna.

På den inledande kursen används boken *Mot bättre vetande i matematik* av A. Dunkels, B. Klefsjö, I. Nilsson och R. Näslund från 2002. Av bokens nio kapitel ingår merparten av de fem första i *Introduktionskursen*¹. Varje kapitel är indelat i ett antal avsnitt. Vi kommer nedan att referera till bokens olika avsnitt, där t.ex. 3.4 betecknar fjärde avsnittet i tredje kapitlet, men i anslutning till det också ange vad som behandlas i de olika avsnitten.

Hösten 2004 bedrevs undervisningen på kursen i en sådan form att en stor grupp lärare (professorer, lektorer, adjunkter, doktorander och ett antal assistenter) vid KTH Matematik, avdelning Matematik, mötte studenterna i lektionsundervisning i grupper om cirka trettio studenter. Detta innebar ett unikt tillfälle att få en bred bild av hur studenternas förkunskaper från gymnasiet förhåller sig till våra förväntningar och förkunskapskrav.

Samtliga lektionslärare, totalt 46 stycken, har fått möjlighet att besvara en enkät, där de ombeds att ge exempel på färdigheter och stoff som för merparten av studenterna i deras undervisningsgrupp kan inplaceras i någon av följande fyra kategorier:

Kategori	Stoff i kursen 5B1120 som merparten av studenterna ...
A	behärskar och förstår så bra ifrån gymnasiet att repetitionen i 5B1120 är överflödig.
B	behärskar och förstår så pass bra från gymnasiet att det är lagom med en repetition av ungefär den omfattning som ges i 5B1120.
C	har studerat på gymnasiet, men som skulle kräva en betydligt mer omfattande behandling än vad som ges tillfälle till under 5B1120
D	inte känner igen från gymnasiet.

¹ Läsanvisningar till kursen finns på <http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1120/200405/>

Enkäten har besvarats av 29 av de 46 lärarna.

Samtliga studenter på Öppen Ingång (3 lektionsgrupper) och på Mikroelektronik (1 lektionsgrupp) som följde kursen 5B1120 gavs tillfälle att besvara en liknande enkät, där de skulle ge exempel på stoff och färdigheter som för dem själva tillhörde någon av de fyra kategorierna **A - D**. 36 studenter på Öppen Ingång och 5 studenter på Mikroelektronik besvarade enkäten.

Av de 1280 studenter som deltog i det frivilliga förkunskapstest som ges den första dagen i mottagningsveckorna hade 912 stycken betyg från gymnasiets kurs D. Av dessa hade i sin tur 202 stycken betyg G på kurs D (Brandell 2004). Av de studenter som har besvarat enkäten uppgav 24 sitt gymnasiebetyg, 3 av dessa uppgav betyg G. De studenter som har uppgett betyg VG eller MVG, totalt 21 stycken, har ofta svarat mer utförligt; de har i genomsnitt klassificerat flera moment och lämnat flera exempel än gruppen som helhet. Sammanfattningsvis har alltså svaren från studenter med betyg VG eller MVG kommit att väga oproportionerligt tungt i denna undersökning. Det är viktigt att ha i minne när resultatet tolkas.

Förutom att tolka enkätsvaren har vi också jämfört med utfallet på de två diagnostiska prov som gavs vid kursens början, samt med utfallet på det avslutande provet.

Dessutom pågår en analys av lösningarna från Öppen Ingång till det prov som avslutade kursen. Syftet är att beskriva vanligt förekommande fel och missuppfattningar; utfallet av detta kommer att redovisas separat (Cronhjort 2005).

Notation: De fyra stoffkategorierna kommer att betecknas i fetstil (**A, B, C, D**), medan gymnasiets matematikkurser kommer att betecknas med normal stil (A, B, C, D, E).

2 Resultat av studentenkät och lärarenkät

Både bland elever och lärare har man valt olika sätt besvara enkäten. Vissa har klassificerat vart och ett av de aktuella fem kapitlen i kursboken i någon av kategorierna (t.ex. ”kapitel 3 tillhör kategori C”), men de flesta har gett exempel på avsnitt i boken som hör till en viss kategori (t.ex. ”avsnitt 1.2 är kategori B”), och många har också kompletterat med exempel på övningar eller begrepp som har klassificerats. Några lärare har funnit att enkätens form inte är adekvat, och har istället gett fritextsvar. De resultat som redovisas här är vår sammanvägda tolkning; vår uppfattning är att de inkomna svaren ger en tämligen entydig bild. Utfallen på proven är konsistent med nedanstående beskrivning, om inte annat anges.

2.1 Studenternas svar

Samtliga studenter på Öppen Ingång (3 lektionsgrupper) och på Mikroelektronik (1 lektionsgrupp) som följde kursen 5B1120 gavs tillfälle att besvara studentversionen av enkäten, där de skulle ge exempel på stoff och färdigheter som för dem själva tillhörde någon av de fyra kategorierna A - D. 36 studenter på Öppen Ingång och 5 studenter på Mikro-elektronik besvarade enkäten.

Studenterna ombads att i sina enkätsvar ange vilket betyg de hade från Matematik D på gymnasiet. När vi här nedan ger exempel på enskilda studenters svar anges det betyg de har uppgett inom parentes.

Som redan har nämnts finns det skäl att tro svar från studenter med betyg VG och MVG från gymnasiets kurs D är något överrepresenterade.

En grupp studenter har helt eller delvis lämnat svar genom att klassificera de olika avsnitten inom ett kapitel eller genom att ge exempel på övningar eller begrepp som placeras i de olika kategorierna. Här nedan redovisas dessa svar kapitel för kapitel. Antalet svar som innehåller klassificering av denna typ är 23 (Kapitel 1), 22 (Kapitel 2), 23 (Kapitel 3), 20 (Kapitel 4) respektive 20 (Kapitel 5).

Ett antal studenter, 18 från Öppen Ingång och samtliga 5 svarande från Mikroelektronik, har valt att helt eller delvis klassificera sina svar på kapitelnivå. Dessa svar redovisas separat.

2.1.1 Numeriska och algebraiska beräkningar (Kapitel 1)

Räkning med bråk (1.2), **Algebraiska beräkningar** (1.3), **Kvadratrötter** (1.4) och **Ekvationslösning** (1.5), klassificeras med stor majoritet som tillhörande kategori B vad avser de grundläggande delarna i respektive avsnitt.

Mer komplexa problem från avsnitten 1.2 – 1.5 ges som exempel i kategori C och D.

- Flera studenter nämner faktorisering. En student (MVG) C-klassificerar uppgiften att faktorisera $9a^4 - 16b^4$. Faktorisering som kräver förberedande förenklingar klassas som D av en student (betyg okänt).

- Uppgiften "Lös ekvationen $\frac{x}{\frac{4}{3}-x} - \frac{\frac{1}{3}-x}{x} = \frac{1}{9x}$ " klassas som **C** av en student (betyg okänt), och som **D** av en annan (VG).

Kvadratkomplettering (1.6) klassas mest som **C** eller **D**. Flera elever påpekar att detta är nytt, men å andra sidan inte så svårt att lära sig.

Formler (1.7) och **Funktioner** (1.8) får en spridd bedömning. Mer komplexa uppgifter bedöms som **C - D**. Sammansättning av funktioner är nytt/svårt för de allra flesta.

Summor (1.9) omnämns också av några studenter (och några lärare), då som nytt stoff (kategori **D**). (Detta avsnitt ingår inte i kursen, och har därför inte fått så många bedömningar)

	A	B	C	D
Kap 1.1	7	3	0	0
Kap 1.2	6 (+ 2 Ex)	4 (+ 8 Ex)	0 (+ 1 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 1.3	4	4 (+ 4 Ex)	0 (+ 3 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 1.4	2 (+ 1 Ex)	6	0	1
Kap 1.5	3	7	0 (+ 1 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 1.6	1	3	7	9
Kap 1.7	1	3	2 (+ 1 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 1.8	2	3	0	0 (+ 2 Ex)
Kap 1.9	1	0	0	2

Tabell 1. I tabellen redovisas hur många studenter som klassificerade respektive avsnitt i de olika kategorierna. Inom parentes anges hur många studenter som har klassificerat ett exempel eller ett begrepp från respektive avsnitt i kategorin ifråga. T.ex. har 6 studenter klassificerat avsnitt 1.2 som helhet i kategori **A**, medan ytterligare 2 studenter har lämnat exempel på övningar eller begrepp ur kapitel 1.2 i kategori **A**.

2.1.2 Rationella funktioner, ekvationer, olikheter och absolutbelopp (Kapitel 2)

Polynom (2.1), **Rationella funktioner** (2.2) och **Andragradsekvationer** (2.5) klassificeras som **A** eller **B** av de allra flesta. En enkel andragradsekvation löstes av 51% av studenterna på Öppen Ingång på det diagnostiska provet som inledde kursen, och efter kursens slut löstes en likartad uppgift av betydligt fler, 83%. Man kan tolka det som att den inledande kursen "träffar rätt" här.

Polynomdivision (2.4) klassas antingen som **B** eller **D**. Dvs. vissa studenter har behandlat det på gymnasiet, och också lärt sig det ganska väl, medan det är helt nytt för andra. Det vanligaste torde vara att detta behandlas i kurs E på gymnasiet, som inte längre är förkunskapskrav till KTH. Noteras kan att flera av dem som klassat detta som **D** ändå säger att det var lätt att lära sig. Andra säger sig vara obekanta även med numerisk långdivision i "trappan" eller "liggande stolen".

Faktorsatsen och lösning av polynomekvationer (2.6) får en blandad klassificering. Studenterna klassar detta övervägande som **B**, vilket är något överraskande, medan lärarna bedömer det som **C**. Studenterna har förmodligen uppfattat en enkel metod, medan lärarna förmodligen mer har tänkt på sambandet mellan rötter och faktorer. Detta är också kurs E-material på gymnasiet

Rotekvationer (2.7) får en spridd bedömning.

Såväl **Olikheter** (2.8) som **Absolutbelopp** (2.9) klassas i **C**, med viss spridning.

	A	B	C	D
Kap 2.1	5 (+ 1 Ex)	4 (+ 1 Ex)	1	0
Kap 2.2	1 (+ 1 Ex)	4 (+ 2 Ex)	0	0
Kap 2.3	-	-	-	-
Kap 2.4	0	6 (+ 2 Ex)	1 (+ 1 Ex)	7
Kap 2.5	5 (+ 2 Ex)	4	0	0
Kap 2.6	0	7 (+ 2 Ex)	3 (+ 1 Ex)	2
Kap 2.7	0 (+ 1 Ex)	7	3	2
Kap 2.8	0	3	7	4 (+ 1 Ex)
Kap 2.9	0 (+ 1 Ex)	3	10	2 (+ 1 Ex)

Tabell 2. Så här fördelar sig studenternas enkätsvar på kapitel 2. Beteckningarna är de samma som i Tabell 1.

2.1.3 Rötter, potenser och logaritmer (Kapitel 3)

Rötter (3.1) och **Potenser** (3.2) klassificeras som **B** av de flesta, men mer sammansatta och komplexa uppgifter ges som exempel i kategorierna **C** och **D**.

- Studenter lämnar som exempel på uppgifter i kategori **C** ”Förenkla $\sqrt{8}$ ” (VG) och ”Beräkna $\sqrt[3]{81}$ ” (VG), i sig talande exempel på att detta stoff vållar stora svårigheter för många. Vidare nämns i **C** ett par mer komplexa övningar ”Förenkla $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ” (VG) och ”Förenkla $\sqrt[6]{25} - \sqrt[3]{-5} + \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[5]{-10000}}$ ” (betyg okänt). Som **D**-exempel nämns sambandet ” $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ ” (betyg okänt) och uppgifter av typen ”avgör utan approximationer vilket av talen $\sqrt[3]{7}$ och $\sqrt[4]{13}$ som är störst” (VG). En liknande uppgift på ett av de diagnostiska proven, där man skall skatta inbördes storleksordning mellan tre potensuttryck, har också mycket låg lösningsfrekvens.

Logaritmer (3.3) placeras nästan entydigt i kategori **C**. Vår tolkning är att alla studenter har hört talas om logaritmer, och lärt sig några enkla räknegrepp. Men de allra flesta saknar såväl uppövd räknefärdighet som förståelse för logaritmer som begrepp.

- Två studenter exemplifierar med uppgiften 3.24 (ekvationer med x i exponenten) som placeras i kategori **D**.

	A	B	C	D
Kap 3.1	1 (+ 5 Ex)	10 (+ 2 Ex)	0 (+ 3 Ex)	0 (+ 1 Ex)

Kap 3.2	1 (+ 1 Ex)	8 (+ 3 Ex)	2 (+ 1 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 3.3	0 (+ 5 Ex)	2 (+ 3 Ex)	13 (+ 5 Ex)	0 (+ 2 Ex)

Tabell 3. Så här fördelar sig studenternas enkätsvar på kapitel 3. Beteckningarna är de samma som i Tabell 1. Av de lämnade exemplen kommer ett stort antal från en och samma student (MVG). Denna students exempel utgör en stor del av exemplen i kategori **A** (2 från 3.1, 1 från 3.2, 5 från 3.3). Samma student svarar också för en stor andel av exemplen i kategori **B** (1 från 3.2 och 3 från 3.3), och lämnar dessutom ett exempel i kategori **C** från kapitel 3.3.

2.1.4 Trigonometri (Kapitel 4)

Grader och radianer (4.1) klassas i **A** och **B**. Studenterna klassar också **Rätvinkliga trianglar** (4.6) i kategori **A** eller **B**. Vår tolkning är att de känner sig säkra på hur sinus och cosinus beräknas för vinklar i rätvinkliga trianglar ("motstående/hypotenusan" etc.). Erfarenhetsmässigt är de däremot mycket osäkra på de trigonometriska funktionernas värden för standardvinklarna, och oftast obekanta med hur härleds med hjälp av lämpliga trianglar.

Cosinus och sinus (4.2) är klassat som **B** av de flesta, men andra exempel ges. Definitionerna i enhetscirkeln, och härledning av elementära samband med hjälp av dessa är nytt för många.

Några trigonometriska kurvor (4.4) klassas mellan **B** och **C**

Trigonometriska formler (4.7) klassas som **C**. Studenterna säger t.ex. "det svårt att komma ihåg alla formlerna", och att de är ovana vid härledningar.

Trigonometriska ekvationer (4.3 och 4.8) är **C**-material (vissa av lärarna klassar 4.8 som **D**). Ovanan vid att använda grundläggande trigonometriska formler och bristande förståelse av de trigonometriska funktionernas definition (enhetscirkeln) är en ständig källa till problem. För enklare ekvationer (t.ex. $2 \cos x = \sqrt{3}$ eller $\sin 2x = 1$) kan många hitta en eller ett par lösningar, men är osäkra på att bestämma periodicitet i lösningarna.

	A	B	C	D
Kap 4.1	5 (+ 2 Ex)	4 (+ 1 Ex)	1	0
Kap 4.2	3 (+ 1 Ex)	5 (+ 2 Ex)	1 (+ 2 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 4.3	0	3	7	0 (+ 1 Ex)
Kap 4.4	1	5 (+ 1 Ex)	4 (+ 1 Ex)	0
Kap 4.5	-	-	-	-
Kap 4.6	4	5	1	0
Kap 4.7	0	3	6 (+ 4 Ex)	1
Kap 4.8	0	3	7 (+ 4 Ex)	1 (+ 1 Ex)

Tabell 4. Så här fördelar sig studenternas enkätsvar på kapitel 4. Beteckningarna är de samma som i Tabell 1.

2.1.5 Kurvor (Kapitel 5)

Linjen (5.1) bedöms av de flesta studenter som kategori **A**, och av lärarna som **A** eller **B**. Märk väl att detta kapitel huvudsakligen behandlar räta linjens ekvation på formen $y = kx + m$. Detta kan jämföras med en av diagnos-uppgifterna, där man skulle bestämma ekvationen för

den räta linjen genom två givna punkter i planet; den löstes av 43% av studenterna på Öppen Ingång (lösningsfrekvensen varierade kraftigt mellan de olika programmen, från 17% till 79%).²

Några andragskurvor (5.2) klassas ganska enhälligt som **C** eller **D**. Ekvationen för en cirkel, speciellt då medelpunkten är i origo, lyfts fram som tillhörigt kategori **B** av ett par studenter (VG). Tankekedjan ”Pytagoras Sats – Avståndsformeln i planet – Cirkelns ekvation (allmän position)” verkar ny för många. Ekvationerna för ellips och hyperblar är helt nytt för en del, förmodligen för de flesta.

Funktionskurvor (5.3) har endast klassificerats av ett fåtal studenter, flera uppger att de inte har hunnit med de sista avsnitten. Avgivna svar återfinns i ungefär lika delar i **B** och **C**. Lärarna klassificerar mestadels detta stoff som **B**.

	A	B	C	D
Kap 5.1	9 (+ 2 Ex)	4	1	0
Kap 5.2	0	2 (+ 2 Ex)	8 (+ 5 Ex)	5 (+ 1 Ex)
Kap 5.3	1	4	5	0

Tabell 5. Så här fördelar sig studenternas enkätsvar på kapitel 5. Beteckningarna är de samma som i Tabell 1.

2.1.6 Svar från studenter som har svarat på kapitelnivå

Ett antal studenter, 18 från Öppen Ingång och samtliga 5 svarande från Mikroelektronik, har valt att helt eller delvis klassificera sina svar på kapitelnivå. Detta är svårtolkat, men motsäger inte beskrivningen här ovan. Svaren fördelar sig på följande sätt.

	A	B	C	D
Kap 1	3	17	1	0
Kap 2	0	15	2	1
Kap 3	0	10	10	0
Kap 4	0	11	7	0
Kap 5	1	9	6	3

Tabell 6. Antal studenter som har klassificerat respektive kapitel som helhet i de olika kategorierna.

2.1.7 Kommentarer från studenterna

- Tempot var för högt anger flera studenter; man har inte med allt (speciellt hann man inte repetera allt det som var nytt i kursen säger en av dessa). (betyg okänt, G, VG, VG)
- ”Jag kände igen det mesta, det som var svårt var att räkna utan hjälpmedel och att lära sig att räkna på ett nytt sätt. Dessutom var det för lite tid för att lära sig använda härledningarna i räkningen, det har vi aldrig behövt göra förut.”(VG).
- ”Lätt, allt var repetition.” (MVG)

² Här är det intressant att jämföra med resultat från en likadan uppgift från ett diagnostiskt prov vid Umeå Universitet i slutet av nittiotalet. Uppgiften löstes där av 80% av de sökande till civilingenjörsutbildningarna. I en större grupp av studenter, sökande till civilingenjörsutbildningar, högskoleingenjörsutbildningar, lärarutbildningar samt matematisk-naturvetenskapliga utbildningar var lösningsfrekvenserna 85%, 75% respektive drygt 45% i de tre betygskategorierna MVG, VG och G (sid. 35 - 36, Höskoleverket 1999). Det betyder att den genomsnittliga lösningsfrekvensen bland sökande till KTHs Öppen Ingång 2004, där en merpart har betyg VG eller MVG, är lägre än bland studenter med betyg G i Umeå för fem år sedan.

- ”Det var 5 år sedan jag tog studenten så jag uppskattar att kursen varit så grundläggande.” (VG)
- ”Polynomdivision, absolutbelopp, olikheter etc. som läses i kurs E borde ändå formuleras noggrant för sådana (...) som bara har läst matte D (...). Kap 5 andragskurvor var helt nytt för mig. (...)” (VG)
Samma student tillägger att boken inte duger till att lära ut stoff som är nytt, därtill är alldeles för summarisk och ger inga härledningar. Ytterligare än student instämmer i att boken inte var bra, eftersom den nästan inte förklarar någonting, utan bara visar med exempel.
- Bra kurs säger ett par studenter. (VG, MVG)
- ”De allra flesta momenten känner jag igen från gymnasiet, och kursen har befast mina kunskaper bra.” (MVG)
- ”Algebra, bråk, potenser, funktioner har gått bra. Logaritmer och trigonometri har vållat mer bekymmer. Vad matematik är ROLIGT (fortfarande)! ” (Betyg 5, 1982)
- ”I gymnasiet förlitade man sig för mycket på formelsamling och räknare.” (VG)
- ”Jag upplevde kursen som relativt svår, en nyttig väckarklocka (...).” (Betyg okänt)

2.1.8 Om gymnasiebetygets (kurs D) betydelse

Även om materialet är för litet för att man skall kunna dra några säkra slutsatser, så kan man se en tendens till att studenter med MVG på kurs D uppfattar större delar av stoffet som kategori A eller B än vad andra studenter gör. Detta gäller även mera elementära färdigheter. Men också MVG-studenter ger exempel på stoff i kategorierna C och D.

2.2 Lärarnas svar

Enkäten har besvarats av 29 av de 46 lärarna som hade lektionsundervisning på introduktionskursen. Alla civilingenjörsprogram finns representerade bland de svarande lärarna, och de lärare som har valt att inte svara hade är väl spridda vad gäller program de undervisade på.

Den bild som framkommer i lärarnas svar på enkäten stämmer påfallande väl överens med studenternas bild. I stort sett ingenting är så elementärt att det kan klassificeras i kategori A, enligt lärarna, som dock finner en hel del rimligt repetitionsmaterial att placera i kategori B. Stora delar av kursen faller emellertid i kategori C (eller till och med D), och behöver följaktligen, enligt lärarna, en betydligt utförligare behandling. Det som placeras i kategori C eller D är i första hand: kvadratkomplettering, polynomdivision, lösning av polynomekvationer med faktorsatsen, rotekvationer, absolutbelopp, olikheter, logaritmer, trigonometriska formler, trigonometriska ekvationer samt kägelsnitt.

2.2.1 Numeriska och algebraiska beräkningar (Kapitel 1)

Detta kapitel framstår som relativt okomplicerat. Det mesta anses vara repetitionsmaterial på lämplig nivå. Undantaget är kvadratkomplettering som anses behöva ett mer omfattande studium. En del räknetekniskt mer komplicerade uppgifter placeras också i högre kategori.

Lärarna klassificerar de olika avsnitten i kapitel 1 så här:

Räkning med bråk (1.2), **Algebraiska beräkningar** (1.3), **Kvadratrötter** (1.4) och **Ekvationslösning** (1.5), klassificeras i huvudsak som **B**. Enstaka mer räknetekniskt komplicerade uppgifter kan i några fall placeras i kategori **C** och i något fall **D**.

Kvadratkomplettering (1.6) klassas mest som **C**, även om såväl **B** som **D** också förekommer.

Formler (1.7) hamnar i **B**. **Funktioner** (1.8) placeras i genomsnitt i **C**. **Summor** (1.9) kategoriseras som **C** eller **D**, men ingår egentligen inte i kursen.

	A	B	C	D
Kap 1.1	6	6 (+ 2 Ex)	0 (+ 4 Ex)	0
Kap 1.2	4 (+ 2 Ex)	10 (+ 3 Ex)	0	0
Kap 1.3	1	10 (+ 1 Ex)	1 (+ 1 Ex)	0
Kap 1.4	3	7	2	0 (+1 Ex)
Kap 1.5	1	9	3	0
Kap 1.6	0	7	8	4 (+ 1 Ex)
Kap 1.7	0	6	2	0
Kap 1.8	0	4	5 (+ 1 Ex)	1
Kap 1.9	0	0	2	2

Tabell 7. Så här fördelar sig lärarnas enkätsvar på kapitel 1. Beteckningar som tidigare.

2.2.2 Rationella funktioner, ekvationer, olikheter och absolutbelopp (Kapitel 2)

Även detta kapitel består enligt enkätsvaren delvis av rimligt repetitionsmaterial i kategori **B**. Några undantag förekommer: polynomdivision och lösning av polynom-ekvationer med faktorsatsen hamnar i genomsnitt i kategori **C**. Detsamma gäller rotekvationer, olikheter och absolutbelopp. Spridningen är stor. Uppgifter med hög grad av beräkningskomplexitet placeras genomgående i kategori **D**.

Lärarnas kategorisering av kapitel 2 avsnitt för avsnitt är som följer:

Polynom (2.1), **Rationella funktioner** (2.2) och **Andragradsekvationer** (2.5) klassificeras som **B**. Det gör också **Partialbråksuppdelning** (2.3) även om detta avsnitt egentligen inte ingår i kursen; det senare är anmärkningsvärt eftersom detta knappast är något som har tränats i någon större omfattning på gymnasiet.

Polynomdivision (2.4) klassas vanligen som **C**, även om både **B** och **D** också är flitigt förekommande.

Faktorsatsen och lösning av polynomekvationer (2.6) klassas i genomsnitt som **C**. **Rotekvationer** (2.7), **Olikheter** (2.8), **Absolutbelopp** (2.9) får en spridd bedömning med tyngdpunkten i kategori **C**. Påfallande många kategori **D**-svar återfinns här.

	A	B	C	D
Kap 2.1	3 (+ 1 Ex)	7	0	0
Kap 2.2	1 (+ 1 Ex)	7 (+ 2 Ex)	2	0
Kap 2.3	0	5	2	0
Kap 2.4	0	8	9 (+ 1 Ex)	3
Kap 2.5	1	12	0	0

Kap 2.6	0	5	7 (+ 1 Ex)	3 (+ 1 Ex)
Kap 2.7	0	5	5	2 (+ 2 Ex)
Kap 2.8	0	4	7	4
Kap 2.9	0	5	6	6

Tabell 8. Så här fördelar sig lärarnas enkätsvar på kapitel 2.

2.2.3 Rötter, potenser och logaritmer (Kapitel 3)

I huvudsak hamnar rötter och potenser i kategori **B**, medan logaritmer placeras i kategori **C**. Särskilt beräkningstekniskt komplicerade uppgifter om potenser kan placeras i **C** eller **D**. En tolkning av svaren på detta kapitel kan vara att studenterna tycks känna till begreppen men förståelsen av dem och träningen på att använda dem är bristfällig. En särskild svårighet som pekas ut av någon lärare är att många studenter verkar ha svårt att inse att log-lagar och potenslagar kan bevisas och förstås. Synen på formler återkommer vi till i samband med kapitlet om trigonometri.

Lärarnas kategorisering av kapitel 3 avsnitt för avsnitt är så här:

Rötter (3.1) och **Potenser** (3.2) klassificeras som **B** av de flesta, men mer sammansatta och komplexa uppgifter ges som exempel i kategorierna **C** och **D**.

Logaritmer (3.3) placeras ganska tydligt i kategori **C**.

	A	B	C	D
Kap 3.1	2 (+ 2 Ex)	12 (+ 2 Ex)	1	0
Kap 3.2	0	12	4 (+ 2 Ex)	0 (+ 1 Ex)
Kap 3.3	0	7	15	0

Tabell 9. Så här fördelar sig lärarnas enkätsvar på kapitel 3.

2.2.4 Trigonometri (Kapitel 4)

Detta kapitel placerar lärarna i huvudsak i kategori **C**. Avvikelser förekommer dock och spridningen är stor. Särskilt problematiska är, enligt lärarna, avsnitten 4.7 och 4.8 om trigonometriska formler och trigonometriska ekvationer. Vi anser att två nycklar till förståelsen av diskrepansen mellan gymnasiet och högskolan på detta område är enhetscirkeln och synen på formler. Lärarna upplever ofta att studenterna är ovana vid att dra slutsatser om trigonometriska funktioner med hjälp av enhetscirkeln. Här skulle det behövas en mer grundläggande undervisningsinsats. Dessutom tycker sig en del lärare se att många studenter har svårt att ta till sig att formler är något som kan härledas, bevisas och förstås, och inte bara något som står i ett formelblad och som man får använda fritt vid behov.

Lärarnas kategorisering av kapitel 4 avsnitt för avsnitt ser ut så här:

Grader och radianer (4.1) klassas för det mesta i **B**. Möjligtvis kan detta sägas gälla också om **Rätvinkliga trianglar** (4.6). Men övriga avsnitt har tyngdpunkten i **C**.

Cosinus och sinus (4.2), **Några grundläggande trigonometriska ekvationer** (4.3) och **Några trigonometriska kurvor** (4.4) får en spridd bedömning. Trots den relativt grundläggande karaktären hos dessa avsnitt hamnar tyngdpunkten i bedömningen i kategori **C**.

Tangens och Cotangens (4.5) är också det relativt grundläggande till sin karaktär men placeras ändå ganska entydigt i kategori **C**. Detta kapitel ingår egentligen inte i kursen.

Särskilt problematiska avsnitt är enligt svaren **Några trigonometriska formler** (4.7) och **Trigonometriska ekvationer** (4.8). Många uppgifter på trigonometriska ekvationer klassificeras rent av som **D**. 4.9 ingår egentligen inte i kursen.

	A	B	C	D
Kap 4.1	2 (+ 1 Ex)	8 (+ 1 Ex)	4	0
Kap 4.2	1	6 (+ 1 Ex)	8	0
Kap 4.3	1	3	11 (+ 1 Ex)	0
Kap 4.4	1	3	9 (+ 1 Ex)	1
Kap 4.5	0	1	5	1
Kap 4.6	1	6	6	0
Kap 4.7	0	4	7	2
Kap 4.8	0	4	8	7 (+ 4 Ex)
Kap 4.9	0	1	3	2

Tabell 10. Så här fördelar sig lärarnas enkätsvar på kapitel 4.

2.2.5 Kurvor (Kapitel 5)

Detta kapitel innehåller en hel del rimligt repetitionsmaterial, enligt lärarsvaren, till exempel linjens ekvation och kanske också funktionskurvor. När det gäller kägelsnitt är det dock annorlunda: dessa placeras i kategori **C**. Det är intressant att notera att flera lärare gör observationen att svårighetsgraden ökar markant för varje steg i kedjan ”linje – cirkel runt origo – cirkel i allmän position - hyperbel/ellips”. En del tycker till och med att ökningen i svårighetsgrad per led i kedjan kan vara ett helt kategoristeg.

Lärarnas kategorisering av kapitel 5 avsnitt för avsnitt är så här:

Linjen (5.1) bedöms av de flesta lärare som kategori **B**.

Några andragsgradskurvor (5.2) klassas av de flesta som **C** eller **D**.

Funktionskurvor (5.3) placeras av de flesta i **B** eller **C**.

	A	B	C	D
Kap 5.1	3 (+ 2 Ex)	7 (+ 2 Ex)	1	0
Kap 5.2	0	4	6 (+ 1 Ex)	5
Kap 5.3	0	5	4 (+ 1 Ex)	1

Tabell 11. Så här fördelar sig lärarnas enkätsvar på kapitel 5.

2.2.6 Kommentarer från lärarna

Flera lärare pekar på generella svagheter som inte hör ihop med något speciellt stoff:

- Brister i parenteshantering och prioritetsregler
- Osäkerhet även i elementära räkningar
- ”Matematisk oföretagsamhet”
- Svårt att se skillnaden mellan uttryck och ekvationer, och hur man ”bokför” ekvationslösning respektive förenkling av uttryck
- Svårt med betydelse och användning av symbolerna $=, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \rightarrow$ osv.
- Oförmåga att snabbt skissera enkla grafer
- En allmän matematisk ovana sätter ned tempot vid exempelvis problemlösning
- Studenterna är mycket beroende av räknare och formelsamling
- Elementära räknfel, missförstånd och allmän oföretagsamhet är vanligare orsaker till förvirring än att materialet är obekant
- Studenterna arbetar för dåligt
- Spridningen av kunskaperna är stor

Mer specifika kommentarer är till exempel:

- Roten 0 divideras bort vid ekvationslösning
- Dubbla produkten försvinner vid kvadrering
- Användning av felaktiga formler, till exempel felaktiga log-lagar
- Problem med algebraiska omskrivningar
- Kvadratkomplettering verkar obekant

3 Sammanfattning

3.1 En sammanfattande klassificering

Vi gör en sammanfattning av den klassificering som framträder ur student- och lärarenkäten.

Kategori A: De mest elementära räkningarna med reella tal och polynom. Råta linjens ekvation på formen $y = kx + m$. Vinkelmått en grader och radianer.

Kategori B: Elementära numeriska räkningar (bråk, heltalspotenser, kvadratrötter) och algebraiska räkningar (polynom, rationella uttryck). Linjära ekvationer och andragradsekvationer. Enklare rotekvationer. Elementära räkningar med rötter och potenser. Sinus/cosinus i rätvinkliga trianglar. ”Trigonometriska ettan”. Ekvationen för origo-centrerade cirklar.

Kategori C: Faktorisering av polynom. Förenkling av mer komplexa rationella uttryck. Sammansättning av funktioner. Förenklingar och beräkningar som kräver flera steg och företagsamhet. Olika. Absolutbelopp. Mer komplexa räkningar med rötter och potenser. Enklare logaritmräkningar. Enhetscirkeln och de trigonometriska funktionerna. Trigonometriska formler. Trigonometriska ekvationer. (Härledning av) cirkelns ekvation i allmän position.

Kategori D: Kvadratkomplettering. Summasymbolen. Faktorsatsen, polynomdivision och lösning av polynomekvationer av grad ≥ 3 .

Mer komplexa uppgifter med logaritmer. Logaritmer som begrepp. Samband mellan potens- och logaritmlagar. Basbyte i logaritmer.

Ekvationerna för kägelsnitt.

Formler: Att ha memorerat, kunna härleda och förstå samband mellan de vanligaste formlerna för trigonometriska funktioner, samt potens-, logaritm- och exponentialfunktioner; att förstå innebörden av att en formel är sann, att kunna falsifiera formler.

3.2 Kommentarer

1. Studenterna är när de kommer till högskolan vana vid att förlita sig på sin formelsamling. Ytterst få moment på gymnasiet, om ens något, genomförs utan formelsamling. För många studenter tycks formelsamlingen ha varit en samling av mer eller mindre godtyckliga regler som man får använda sig av, utan att man har reflekterat över varför. Många är oklara på vad det betyder att en formell är sann respektive falsk. Se vidare den parallellt utarbetade rapporten (Cronhjort 2005).

Vid starten på KTH krävs plötsligt att de ska klara sig utan formelsamling. Detta måste rimligen upplevas som rätt chockartat, då de inte har vana att härleda formler ur varandra eller att bedöma potentiella formlers rimlighet.

2. Studenterna är från gymnasiet vana vid att förlita sig på sina (grafritande) räknare, för såväl kalkyler som grafritande. Vid högskolan krävs plötsligt att man skall klara sig utan räknaren vid numeriska kalkyler och vid grafritning, vilket är en nyhet och en ytterligare svårighet för många.

3. Studenter med betyg MVG upplever i högre grad än andra kursen som en repetition av tidigare inlärd färdigheter. En tänkbar förklaring är att grundskolans och gymnasiet matematikundervisning är sådana att endast de duktigaste studenterna hinner uppväsa och befästa sina kunskaper och färdigheter. För dem som inte hör till de allra duktigaste eller ambitiösaste behandlas mycket stoff på ett sådant sätt att det hamnar i kategori C, dvs. man har stött på och övat en del på stoffet i fråga, men aldrig uppnått någon förståelse eller bestående färdighet. Liknande slutsatser finner man i Lars Brandells rapport (Brandell 2004).
4. Studentsvar och granskade skrivningar kommer huvudsakligen från Öppen Ingång som placerar sig i mitten av KTHs civilingenjörsprogram vad gäller antagningspoäng och resultat på de diagnostiska proven. Utfallet av de diagnostiska proven vid KTH varierar kraftigt mellan programmen (Brandell 2004), och resultatet av studentenkäten hade förmodligen blivit ett annat om enkäten hade riktats till en annan studentgrupp.

Svar från studenter med betyg VG och MVG från kurs D i gymnasiet har kommit att väga oproportionerligt tungt.

Resultaten måste tolkas i ljuset av detta. Undersökningar från KTH och Umeå Universitet (Brandell 2004, Bylund och Boo 2003) visar på en stark korrelation mellan gymnasiebetyg och resultat på inledande diagnostiska prov. Det är inte långsökt att tänka sig att även upplevelsen av den inledande kursen påverkas i motsvarande grad. Många av våra nyantagna studenter skulle alltså förmodligen placera en större andel stoff i kategori C och D än vad som här har redovisats.

Referenser

- Brandell, Lars. (2004) Matematikkunskaperna 2004 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH.
- Bylund, Per och Boo, Per-Anders. (2003) Studenters förkunskaper. *Nämnamn* nr 3, 2003.
- Cronhjort, Michael. (2005) *En studie av fel på tentamen 2004-08-27 i 5B1120 Introduktionskurs i matematik, 1 poäng*. Pågående arbete
- Dunkels, Andrejs et. al. (2002). *Mot bättre vetande i matematik, 3:e upplagan*. Studentlitteratur. Lund.
- Thunberg, Hans och Filipsson, Lars. (2005) *Förväntade och önskade förkunskaper i Matematik vid KTHs civilingenjörsutbildningar*. KTH.
- Högskoleverket. (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?*
- KTH Matematik. *Läsanvisningar till Introduktionskurs i Matematik*.
<http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1120/200405/>