Matematiska Institutionen
KTH

Exam for the course Linjär algebra, SF1604 (och 5B1109), for F1 and D1, December 3, 2007, 08.00-13.00.

Written by: Olof Heden och Sandra Di Rocco

PROBLEM:

PART I

1. (3p) Bestäm samtliga lösningar till den linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 8y & - & z & = & 9 \end{cases}$$

Koefficientmatrisen är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

och $det(A) = 0$ eftersom de första och sista kolonnerna är linjärt beroende. Detta betyder att systemet har oändliga många lösningar:

$$\{(1+t, 1, t) \in \mathbf{R}^3, t \in \mathbf{R}\}.$$

Samtliga lösningar till systemet beskriver linjen parallel till $(1,0,1)$ och som går genom punken $(1,1,0)$:

$$(1,1,0) + t(1,0,1).$$

2. (3p) Bestäm belopp och principalargument för samtliga komplexa tal som satisfierar ekvationen:

$$z^5 = -1.$$

Låt $z = |z|e^{i\theta}$. Då är:

$$|z|^5 = |-1| = 1, \text{ d.v.s } |z| = 1$$

Argumenten blir: $\theta_k = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ för $i = 0, ..., 4$. Med tanken att principalargumentet α_k är sådant att

$$-\pi \leq \alpha_k \leq \pi$$

är principalargumentena:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{5}, \alpha_1 = \frac{3\pi}{5}, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \frac{-3\pi}{5}, \alpha_4 = \frac{-\pi}{5}.$$

3. (3p) Låt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen $(AB^T + 3A)^{-1}$.

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, AB^T + 3A = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AB^T + 3A)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -17 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. (3p)Visa att triangeln med hörn i punkterna $(1, 0, 1), (2, 3, 3)$ och $(2, -1, 2)$ är rätvinkligt och bestäm dess area och omkrets. (ON-system)

   Låt $A = (1, 0, 1), B = (2, 3, 3)$ och $C = (2, -1, 2)$. Triangelns sidorna är:

   $$\vec{AB} = (1, 3, 2), \vec{AC} = (1, -1, 1), \vec{BC} = (0, -4, -1).$$

   Man ser att $\vec{AB}$ är ortogonal mot $\vec{AC}$, då $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$. Eftersom $\|\vec{AB}\| = \sqrt{14}, \|\vec{AC}\| = \sqrt{3}, \|\vec{BC}\| = \sqrt{17}$ är arean lika med $\frac{1}{2}\sqrt{42}$ och omkrets lika med $\sqrt{14} + \sqrt{3} + \sqrt{17}$.

5. (3p) Betrackta matrisen:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Undersök om det finns en diagonalmatris D och en ortogonalmatris Q sådan att $A = QDQ^T$. Bestäm i så fall D och Q.

   Eftersom matrisen A är symmetrisk, så är A ortogonalt diagonaliserbar. Detta betyder att det finns en diagonalmatris D och en ortogonalmatris Q sådan att $A = QDQ^T$.

   Egenvärden till matrisen A, som är lösningar till $det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, är $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$. Egenrummen E_1 och E_3, har dimension 1 och $E_1 = Span(1, 1), E_1 = Span(1, -1)$. Efter man normerar dem får man en ON bas, och basbytematrisen är:

   $$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   Diagonalmatrisen D är:

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

DEL II

6. (3p) För vilka värden på talet a är den kvadratiska formen:

   $$x^2 + y^2 + ayz + z^2,$$

   in de tre variablerna x, y, z, positivt definit?

   En kvadratisk form, Q, är positivit definit om och endast om alla egenvärdena till den associerad matris, A_Q, är positiva.

   $$A_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

   $\det(A_Q - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \frac{a^2}{4}) = (1 - \lambda)(\lambda - \frac{2+a}{2})(\lambda - \frac{2-a}{2})$. De egenvärdena till matrisen är $\lambda = 1$, $\frac{2+a}{2}$, $\frac{2-a}{2}$. De är alla positiva om $a + 2 > 0$ och $2 - a > 0$, d.v.s

   $$-2 < a < 2.$$

7. Låt A vara den linjära avbildning som speglar vektorerna, i den vanliga tredimensionella rymden, i planet med ekvationen $x + 3y - 2z = 0$.(ON system).

   (a) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt ett bassystem som du väljer själv, vilket du vill.
   Låt $(x_o, y_o, z_o) \in \mathbf{R}^3$. Linjen l, normal till planet $x+3y-2z = 0$, och som går genom punkten (x_o, y_o, z_o) har ekvation:

   $$(x, y, z) = t(1, 3, -2) + (x_o, y_o, z_o).$$

   Punkten, P, där linjen träffar planet är den punkt på linjen som satisfierar ekvationen $x + 3y - 2z = 0$. Detta ger $14t + (x_o + 3y_o - 2z_o) = 0$ och $t = -\frac{1}{14}(x_o + 3y_o - 2z_o)$. Då är

   $$P = -\frac{1}{14}(x_o + 3y_o - 2z_o)(1, 3, -2) + (x_o, y_o, z_o)$$

   Bilden av punkten (x_o, y_o, z_o) genom avbildningen A, $A(x_o, y_o, z_o)$, är den punkt på linjen l, sådan att

   $$\|A(x_o, y_o, z_o) - P\| = \|P - (x_o, y_o, z_o)\|.$$

   Det följer att

   $$A(x_o, y_o, z_o) = -\frac{2}{14}(x_o + 3y_o - 2z_o)(1, 3, -2) + (x_o, y_o, z_o) =$$
   $$= (\frac{6}{7}x_o - \frac{3}{7}y_o + \frac{2}{7}z_o, -\frac{3}{7}x_o + \frac{-2}{7}y_o + \frac{6}{7}z_o, \frac{2}{7}x_o + \frac{6}{7}y_o + \frac{3}{7}z_o).$$

   Matrisen, med avseende till standardbasen, B, är:

   $$[A]_B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt att bassystemet $B' = \{\vec{e_1} = (1, 1, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 1), \vec{e_3} = (1, 1, 1)\}$.
   Den basbyte matrisen, från B' till B är:

   $$T_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   och

   $$T_{BB'} = T_{B'B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Avbildningens matris relativt att bassystemet B' blir då:

   $$[A]_{B'} = T_{BB'}[A]_B T_{B'B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & -5 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \\ 16 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

8. (4p) Finns det någon tredjegradsekvation

   $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

   som har precis två reella rötter och en ickereel rot, sådan att a and b är reella tal medan c är en ickereelt tal?

   Låt $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_3 = \alpha + i\beta$, där $\beta \neq 0$ vara rötterna till ekvationen. Då är $a = -x_1 - x_2 - \alpha - i\beta$ som inte är reelt ($\beta \neq 0$). Detta visar att det finns ingen sådan ekvation.

DEL III

9. Låt A och B vara 3×3 matriser.

   (a) (2p) Visa att om kolonnmatrisen X är en egenvektor till båda A och B så är X också en egenvektor till AB.
   Om $AX = \lambda_A X$ och $BX = \lambda_B X$ så är
   $$ABX = A(BX) = A(\lambda_B X) = \lambda_B AX = \lambda_B \lambda_A X.$$

   (b) (2p) Är det alltid sant att om kolunn-matrisen X är en egenvektor till båda B and AB så är X en egenvektor till A? Nej, det gäller inte för alla A, B. Till exempel:
   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   X är en egenvektor till båda B och AB, med egenvärde 0(i båda fall), men
   $$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \lambda X \text{ för alla } \lambda \in \mathbf{R}$$
   (Observera att påståndet alltid gäller om egenvärdet för X till B är skilt från 0.)

   (c) Är det alltid sant att om kolunn-matrisen X är en egenvektor till båda A and AB så är X en egenvektor till B? Nej, det gäller inte för alla A, B. Till exempel:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   X är en egenvektor till båda A och AB, med egenvärde 0(i båda fall), men
   $$B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda X \text{ för alla } \lambda \in \mathbf{R}$$
   (Observera att påståndet alltid gäller om matrisen A är inverterbar.)

10. (a) (2p) Låt A beteckna den linär avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$ sådan att
   $$A(1,0,-1) = (2,1,0,1), A(1,1,0) = (0,1,1,2), A(0,1,-1) = (1,1,1,-1).$$
   Bestäm en linär avbildning B från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$ sådan att
   $$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ för alla } \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$
   Samt bestäm $ker(B)$.
   Vektorerna $\vec{w_1} = (1,0,-1), \vec{w_2} = (1,1,0), \vec{w_3} = (0,1,-1)$ är linjärt oberoende för att
   $$det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$
   Så är $S = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}\}$ en bas till $\mathbf{R}^3$.
   Vektorerna $\vec{v_1} = (2,1,0,1), \vec{v_2} = (0,1,1,2), \vec{v_3} = (1,1,1,-1)$ är också linjärt oberoende: $a\vec{v_1} + b\vec{v_1} + c\vec{v_3} = 0$ ger $(2a+c, a+b+c, b+c, a+2b-c) = (0,0,0,0)$.

$a+b=a+b+c=0$ ger $a=0$, och $2a+c=0$ ger $c=0$ och då $b=0$.
Därför kan man komplettera till en bas till $\mathbf{R}^4$:

$$S' = \{\vec{v_1}, \vec{v_1}, \vec{v_1}, \vec{v_4}\}.$$

Avbildningen B sådan att:

$$B(2,1,0,1) = (1,0,-1), B(0,1,1,2) = (1,1,0), B(1,1,1,-1) = (0,1,-1) \text{ och } B(\vec{v_4}) = 0.$$

är sådan att $BA(\vec{x}) = \vec{x}$ för alla $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$. Varje vektor $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ skrivs som $\vec{x} = a\vec{w_1} + b\vec{w_2} + c\vec{w_3}$

$$B(A(\vec{x})) = B(aA(\vec{w_1}) + bA(\vec{w_2}) + cA(\vec{w_3})) = B(a\vec{v_1} + b\vec{v_1} + c\vec{v_3})$$

$$= aB(\vec{v_1}) + bB(\vec{v_1}) + cB(\vec{v_3}) = a\vec{w_1} + b\vec{w_2} + c\vec{w_3} = \vec{x}.$$

Matrisen $[B]_{SS'}$ har rank 3 eftersom:

$$[B]_{S'S} = (I_3|0)$$

B är surjektiv. Det följer att $dim(Ker(B)) = 1$. Eftersom $Span(v_4) \subseteq Ker(B)$ är $Ker(B) = Span(v_4)$.

(b) Låt A beteckna den linär avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$. Under vilka förutsättningar finns det en linjär avbildning B från $\mathbf{R}^m$ to $\mathbf{R}^n$ sådan att

$$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ for all } \vec{x} \in \mathbf{R}^n?$$

Vad kan du säga om $Ker(B)$ i så fall?
Först observera att $B(0) = x$ för alla $x \in Ker(A)$. Så för att B existerar behöver man att $Ker(A) = \{0\}$ som betyder att A är one-to-one och $rk(A) = n \geq m$.
Så vi ska anta att $rk(A) = n \geq m$. I så fall låt $S = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_1}\}$ vara en bas till $\mathbf{R}^n$. Vektorerna $A(\vec{v_1}), ..., A(\vec{v_n})$ är linjärt oberoende eftersom

$$rk([A]_S) = rk(A) = n.$$

Vi kan då komplettera till en bas till $\mathbf{R}^m$.

$$S' = \{\vec{w_1} = A(\vec{v_1}), ..., \vec{w_n} = A(\vec{v_n}), \vec{w}_{n+1}, ..., \vec{w}_m\}$$

och definiera $B(\vec{w_i}) = \vec{v_i}$ för $i = 1, ..., n$ och $B(\vec{w_i}) = 0$ för $i = n+1, ..., m$

$$BA(\vec{x}) = \vec{x} \text{ for all } \vec{x} \in \mathbf{R}^n$$

Matrisen $[B]_{SS'}$ har rank 3 eftersom:

$$[B]_{S'S} = (I_n|0...0)$$

som betyder att $dim(Ker(B)) = m - n$ och att

$$Ker(B) = span(\vec{w}_{n+1}, ...\vec{w}_m).$$