Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 1 till kursen Linjär algebra, SF1604, för D1 den 12/10 2007, 15:30-16:00.

Namn:

Resultat:

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Med minst 5 poäng blir man godkänd på lappskrivningen. Detta ger en bonuspoäng till ordinarie tentamenstillfället den 3 december och det första tillfället till omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problem

1.(3 p.) Beräkna determinanten av följande matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösning: Genom elementära rad-operationer får man en upper-triangulär matris:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

2.(3 p.)

$$\text{Betrakta matrisen } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Visa att $A^{-1} = 3I_2 - A$.
Lösning 1: $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = BA = I_2$
Lösning 2: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

3. (3 p.)Bestäm samtliga lösningar till systemet

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 12 \end{cases}$$

Lösning: Determinanten av den koefficient-matris, är lika med noll. Då har systemet oändliga många lösningar beroende på minst ett parameter. Matrisen associerad till systemet är: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$. Gauss-Jordan elemination ger:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Då kan vi sätta $z = t$ och $y = 5 - 3t, x = 2 + t - 5 + 3t = 4t - 3$. Lösningar till systemet är $(x, y, z) = (4t - 3, 5 - 3t, t)$ för varje $t \in \mathrm{R}^n$.