Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 3 till kursen Linjär algebra, SF1604, för D1 den 30/10 2007, 9:30-10:00.

Namn och p.n.:

Resultat:

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Med minst 5 poäng blir man godkänd på lappskrivningen. Detta ger en bonuspoäng till ordinarie tentamenstillfället den 3 december och det första tillfället till omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1.(3 p.) För vilka $k \in \mathbf{R}$ är följande vektorer linjärt oberoende?

$$\vec{v_1} = (1, 1, 0), \vec{v_2} = (1, 2, k), \vec{v_3} = (-1, 0, 1).$$

$a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} = 0$ motsvarar systemet:

$$\begin{cases} a + b - c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \\ kb + c &= 0 \end{cases}$$

Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om systemet har endast den triviala lösningen, d.v.s.

$$det(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$det(A) = -k + 1$, som betyder att vektorerna är linjärt oberoende om och endast om $k \neq 1$.

2.(3 p.) (P_2 betecknar vektor-rummet av alla polynom av grad ≤ 2). Visa att

$$Span(1, 1 + x, x + x^2) = P_2.$$

Eftersom $\dim(P_2) = 3$, kan man visa bara att de är linjärt oberoende.

$$a \cdot 1 + b(1 + x) + c(x + x^2) = (a + b) + (b + c)x + cx^2 = 0$$

ger $a + b = b + c = c = 0$, som betyder att $a = b = c = 0$. Detta visar att de är linjärt oberoende och att de utgör en bas.

3. (3 p.) Bestäm dimensionen av nollrummet, $N(A)$, till matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$N(A) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4, Ax = 0\}.$$

Lösningarna till system är av form $(-t + 2s, -t - 3s, t, s)$. och då är

$$N(A) = Span((-1, -1, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$$

Vektorerna $(-1, -1, 1, 0), (2, -3, 0, 1)$ är linjärt oberoende, eftersom ingen är multipel till den annan. Svar: $\dim(N(A)) = 2$.