Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 4 till kursen Linjär algebra, SF1604, för D1 den 13/11 2007, 9:30-10:00.

Namn och p.n.:

Resultat:

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Med minst 5 poäng blir man godkänd på lappskrivningen. Detta ger en bonuspoäng till ordinarie tentamenstillfället den 3 december och det första tillfället till omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1.(3 p.) Givet är $\mathbf{R}^3$ med den inre-produkten

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Bestäm en ortonormal-bas i $Span((1,0,1),(2,1,0))$.

Gram-Schmidt processen ger:

$$u_1 = (1,0,1), u_2 = (2,1,0) - \frac{2}{2}(1,0,1) = (1,1,-1).$$

De är ortogonala, med $\|(1,0,1)\| = \sqrt{2}, \|(1,1,-1)\| = \sqrt{3}$. Det följer att $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\}$ utgör en ON-bas.

2.(3 p.) Givet är $\mathbf{R}^3$ med den inre-produkten

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Bestäm en bas för ortogonala komplementet, $W^\perp$, till $W = Span((1,0,1),(2,1,0))$.

Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

då är $W = R(A)$, och $R(A)^\perp = N(A)$.

$$N(A) = \{v = (x,y,z), Av = 0\} = \{(x,y,z), x + z = 0, 2x + y = 0\} = Span(1,-2,-1).$$

Delrummet $W^\perp$ är en linje och vektorn $(1,-2,-1)$ utgör en bas.

3. (3 p.) Bestäm en “least square solution“ till systemet(i två variablerna x, y):

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ x & = & 2 \\ x+y & = & 0 \end{cases}$$

En “least square solution“ är en lösning till den normala systemet:

$$A^T A v = A^T B$$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Detta blir $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ som ger $(x, y) = (3/2, -3/2)$.