Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 5 till kursen Linjär algebra, SF1604, för D1 den 21/11 2007, 15:30-16:00.

Namn och p.n.:

Resultat:

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Med minst 5 poäng blir man godkänd på lappskrivningen. Detta ger en bonuspoäng till ordinarie tentamenstillfället den 3 december och det första tillfället till omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1.(3 p.) För en linjär avbildning $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gäller att:

$$F(1,0,1) = (0,1,0), F(0,1,0) = (2,1,3), F(1,1,2) = (2,1,0).$$

Bestäm $F(2,0,5)$.

Vektorerna $S = \{(0,1,0),(2,1,3),(2,1,0)\}$ utgör en bas till $\mathbf{R}^3$ då

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(2,0,5) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + c(1,1,2)$$

där $a = -1, b = -3, c = 3$.

$$F(2,0,5) = -F(1,0,1) - 3F(0,1,0) + 3F(1,1,2) = -(0,1,0) - 3(2,1,3) + 3(2,1,0) = (0,-1,-9)$$

2.(3 p.) 2.(3 p.) Låt $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjär avbildning med matris :

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (med avseende till standardbasen)}$$

Bestäm om F är inverterbar och i sådant fall bestäm invers avbildning.

F är inverterbar då

$$\det([F]) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Matrisen till inversen är

$$[F^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket betyder att $F^{-1}(x,y,z) = (x - y + z, y + z, z)$

3. (3 p.)

Bestäm om matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar.

$$det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 1)^3$$

så är det algebraiska multiplicitet av egenvärdet 3 lika med 3.

$$E_1 = \{(x, y, z), y = 0, z = 0\}$$

och så är det geometriska multiplicitet av egenvärdet 3 lika med 1. Detta visar att A inte är diagonaliserbar.