Lösningar till MODELLTENTA LINJÄR ALGEBRA FÖR F1 och D1, SF1604 (5B1109).

DEL I

1. Koordinaterna (x_1, x_2, x_3) till den givna vektorn i den givna basen är reella tal sådana att
$$(1,2,3) = x_1(1,2,1) + x_2(1,1,1) + x_3(2,1,0).$$
Detta leder till ekvationssytemet
$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{cases}.$$
Vi utför Gausselimination och får, med räkningar i tablåform:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$
Uppenbarligen har vi att $x_3 = -1$ varur $x_2 = -3x_3 = 3$ och $x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

   Svar: Koordinaterna blir $(x_1, x_2, x_3) = (0, 3, -1)$.

2. Vi får
$$\left|\frac{(1+i)^{25}(\sqrt{3}/2 - i/2)^{18}}{(1-i)^{12}}\right| = \frac{|(1+i)|^{25}|(\sqrt{3}/2 - i/2)|^{18}}{|(1-i)|^{12}} = \frac{\sqrt{2}^{25}1^{18}}{\sqrt{2}^{12}} = \sqrt{2}^{13} = 64\sqrt{2}.$$
För argumenten får vi
$$arg(\frac{(1+i)^{25}(\sqrt{3}/2 - i/2)^{18}}{(1-i)^{12}}) = 25arg(1+i) + 18arg(\sqrt{3}/2 - i/2) - 12arg(1-i) =$$
$$\frac{25\pi}{4} + \frac{-18\pi}{3} - \frac{-12\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$
Svar: Beloppet är $64\sqrt{2}$ och principalargumentet är $5\pi/4$.

3. Vi får att $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ som ju är
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Sedvanlig matrismultiplikation ger nu

   Svar:
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Två av tringelns sideor ges av $(2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3)$ och $(3,2,1) - (1,1,1) = (2,1,0)$. Triangelns area är hälften av arean av det parallellogram som spänns upp triangelsn sidor dvs av $(1,2,3)$ och $(2,1,0)$, vars area är belppet av kryssprodukten av dessa bägge vektorer:
$$\frac{1}{2}||(1,2,3) \times (2,1,0)|| = \frac{1}{2}||(-3,6,-3)|| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{54}$$
Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{54}$.

5. Karaktersitiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

har rötterna $\lambda = 2$ och $\lambda = -1$ (dubbelrot). Egenvektorer bestämmes på sedvanligt sätt:

Till $\lambda = 2$*:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -3x_2 & & & = & 0 \\ 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

med lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 0)$ som ger egenrummet $E_2 = span\{(1, 0, 0)\}$

Till $\lambda = -1$*:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

med lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(2/3, 1, -1)$ som ger egenrummet $E_{-1} = span\{(2/3, 1, -1)\}$

Till $\lambda = 1$*:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & -2x_2 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

med lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, -1)$ som ger egenrummet $E_1 = span\{(1, 0, -1)\}$

6. Eftersom samtliga koefficienter är reella så kommer även $1 - 2i$ att vara en rot till ekvationen. Enligt sambandet mellan koefficienter och rötter gäller för ekvationens tre rötter x_1, x_2 och x_3 att $(-x_1)(-x_2)(-x_3) = 15$. Med $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$ får vi således

$$(1 + 2i)(1 - 2i)x_3 = -15, \quad \text{eller} \quad 5x_3 = -15.$$

Svar: Rötterna äro $1 + 2i$, $1 - 2i$ resp -3.

7. Vi placerar vektorerna som avbildas och deras bilder som rader i en matris enligt nedan:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Bilden av en rad till vänster i tablån ovan står till höger om strecket. Eftersom A är linjär gäller detta förhållande efter vilket slag av sk elementära radoperationer som helst, (den sk Martins metod). Vi försöker nu med hjälp av elementära radoperationer skapa rader som slutar med 100, 010 resp 001.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -7 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -9 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-4}{7} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ur tabellen ovan läser vi av

Svar: $\bar{f}_1 = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7})$, $\bar{f}_2 = (\frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7})$, $\bar{f}_3 = (\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{-4}{7})$

8. En normal till planet är t ex $\bar{n} = (1, 2, -1)$ och en linje från punkten P till en punkt Q på linjen kommer att ha riktningsvektorn

$$(2, 2, 1) + t(1, 1, 1) - (1, 0, 2) \quad \text{dvs} \quad (1 + t, 2 + t, -1 + t).$$

Den sökta linjen skall vara vinkelrät mot planets normal, och man får då villkoret

$$0 = \bar{n} \cdot (1 + t, 2 + t, -1 + t) \quad \text{dvs} \quad 0 = (1 + t) + 2(2 + t) - (-1 + t) = 2t + 6.$$

Med en punkt Q på givna linjen svarande mot t-värdet $t = -3$. Den sökta linjens riktningsvektor blir alltså $(-2, -1, -4)$.

Svar: Linjen $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(2, 1, 4)$.

9. (a) Vi betraktar $\mathbf{A}$ som matrisen relativt för en linjär avbildning A från R^2 till R^2. Kravet är att bildrum och nollrum överensstämmer. Vi låter

$$A\bar{e}_1 = \bar{0} \quad \text{och} \quad A\bar{e}_2 = \bar{e}_1$$

där $\bar{e}_1 = (1, 0)$ och $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Vi får då avbildningens matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Explicit kontroll visar att matrisens nollrum är $span\{(1, 0)\}$ som ju ocks8a ár matrisens kolonnrum.

(b) Vi betraktar $\mathbf{A}$ som matrisen relativt för en linjär avbildning A från R^3 till R^3. Det gäller allmänt att nollrummets dimension plus bildrummets dimension är lika med dimensionen av det rum som avbildas, dvs om $A : R^3 \to R^3$ så

$$\dim(ker(A)) + \dim(R(A)) = 3$$

Eftersom dimension är heltal så kan inte $\dim(ker(A)) = \dim(R(A))$ gälla i detta fall och då gäller ju aldrig heller att $ker(A) = R(A)$.

(c) Vi betraktar $\mathbf{A}$ som matrisen relativt en linjär avbildning A från R^n till R^n. Om A linjär avbildning från R^n till R^n, och n är ett udda tal så kan det aldrig inträffa att $ker(A) = R(A)$ ty generellt gäller

$$\dim(ker(A)) + \dim(R(A)) = n$$

och eftersom dimension är heltal så kan inte $\dim(ker(A)) = \dim(R(A))$ gälla i detta fall och då gäller ju aldrig heller att $ker(A) = R(A)$.

Om n är ett jämnt tal $n = 2m$ definierar vi, för vilken bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ som helst,

$$A\bar{e}_i = \bar{0} \quad \text{för} \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

samt

$$A\bar{e}_i = \bar{e}_{i-m} \quad \text{för} \quad i = m + 1, m + 2, \ldots, n.$$

Då gäller att $ker(A) = R(A) = span\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$. Eftersom nollrum och kolonnrum till avbildningens matris överensstämmer med motsvarande objekt för den linjära avbildningen så gäller likhet mellan kolonnrum och nollrum för motsvarande matriser.

10. Informationen räcker därför att den karakteristiska ekvationen visar sig ha en dubbelrot skild från den givna roten $\lambda = 5$. Vi finner nämligen att

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 16\lambda + 20 = (\lambda - 5)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = -(\lambda - 5)(\lambda + 2)^2.$$

Då matrisen är symmetrisk är egenvektorer som hör till skilda egenvärden ortogonala samt det finns en bas för R^3 bestående av egenvektorer till matrisen. Tager nu en ortogonalbas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ sådan att

$\bar{e}_1 = (1,1,1)$ samt $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ godtyckliga men ortogonala mot $\bar{e}_1$. Då gäller pga detta att $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ tillhör egenrummet E_{-2} och därmed att

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\bar{e}_1 &= 5\bar{e}_1\\ \mathbf{A}\bar{e}_2 &= -2\bar{e}_2\\ \mathbf{A}\bar{e}_3 &= -2\bar{e}_3\end{aligned}$$

Ovanstående måste gälla för varje val av egenvektorer $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ i egenrummet E_{-2}. Låt A vara den linjära avbildning som matrisen $\mathbf{A}$ beskriver. Då gäller att A är entydigt bestämd av villkoren ovan och därmed finns bara en möjlighet för matrisen $\mathbf{A}$.