MODELLTENTA LINJÄR ALGEBRA FÖR F1 och D1, SF1604 (5B1109).

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (3p) Vektorerna $\bar{e}_1 = (1,2,1)$, $\bar{e}_2 = (1,1,1)$, och $\bar{e}_3 = (2,1,0)$ bildar en bas för R^3. Detta behöver du inte visa men du skall bestämma koordinaterna för vektorn $(1,2,3)$ i denna bas.

2. (3p) Bestäm belopp och principalargument för det komplexa talet
$$\frac{(1+i)^{25}(\sqrt{3}/2 - i/2)^{18}}{(1-i)^{12}} \quad .$$

3. (3p) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ där
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. (3p) Beräkna arean av triangeln med hörn i punkterna $(1,1,1)$, $(2,3,4)$ och $(3,2,1)$. (ON-system)

5. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

DEL II

6. (3p) Det finns reella tal a och b sådana att ekvationen
$$x^3 + bx^2 + ax + 15 = 0$$
har roten $1 + 2i$. Bestäm samtliga rötter till ekvationen.

7. (4p) För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att

$$A(1,1,2) = (2,0,1), \quad A(1,0,-1) = (1,2,3), \quad A(0,0,1) = (1,1,0).$$

   Undersök om det finns vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ sådana att

$$A\bar{f}_1 = (1,0,0), \quad A\bar{f}_2 = (0,1,0), \quad A\bar{f}_3 = (0,0,1),$$

   och bestäm i så fall samtliga sådana vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$.

8. (4p) Betrakta i en 3-dimensionell rymd ett plan π med ekvationen $x + 2y - z = 0$, en punkt P med koordinaterna $(1,0,2)$ och en linje ℓ vars parameterform är $(x,y,z) = (2,2,1) + t(1,1,1)$. Ange på parameterform en linje som är parallell med π, går genom punkten P och som skär linjen ℓ. (ON-system kan förutsättas om man så önskar.)

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i beviset.

9. (a) (2p) Bestäm en 2×2-matris $\mathbf{A}$ vars nollrum och kolonnrum överensstämmer.
   (b) (2p) Visa att en det inte finns någon 3×3-matris med ovanstående egenskap.
   (c) (2p) Föreslå, med motivering, ett generellt påstående om matriser i allmänhet, relaterat till uppgifterna (a) och (b) ovan. (Du behöver inte bevisa ditt påstående för att få två poäng på denna deluppgift, men antalet poäng beror på svarets kvalité i övrigt.)

10. (4p) Avgör om nedanstående information räcker för att bestämma matrisen $\mathbf{A}$ entydigt:
    (i) $\mathbf{A}$ är symmetrisk.
    (ii) Den karakteristiska ekvationen $0 = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ till matrisen $\mathbf{A}$ är

    $$-\lambda^3 + \lambda^2 + 16\lambda + 20 = 0.$$

    (iii) Vektorn $(1 \;\; 1 \;\; 1)^T$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdet 5.

    Om svaret är att informationen ovan räcker för att bestämma matrisen $\mathbf{A}$ skall $\mathbf{A}$ bestämmas, om svaret är att informationen inte räcker skall ovanstående tre villkor kompletteras med ett ytterligare villkor som gör matrisen $\mathbf{A}$ entydigt bestämd och därefter skall matrisen $\mathbf{A}$ bestämmas. (Kvalitén i dina motiveringar och hur din lösning presenteras är avgörande för antalet poäng du kommer att få på uppgiften.)