Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar på linjära avbildningar och egenvärden och ehenvektorer inför lappskrivning nummer 5 på kursen linjär algebra SF1604, ht 07.

OBS Några av uppgifterna nedan är kanske svårare än den uppgift som kommer på lappskrivningen nästa onsdag.

1. För en linjär avbildning $A : R^3 \to R^3$ gäller att $A(1,0,0) = (1,2,1)$, $A(0,1,0) = (2,-1,2)$ och $A(0,0,1) = (1,1,1)$.
   (a) Bestäm $A(2,1,0)$.
   (b) Bestäm A:s nollrum.
   (c) Bestäm A:s bildrum.
   (d) Givet basen $\bar{f}_1 = (1,1,1)$, $\bar{f}_2 = (1,1,-1)$ och $\bar{f}_3 = (1,-1,0)$. Bestäm avbildningens matris relativt denna bas, dvs bestäm ${}_{\mathbf{f}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$.
   (e) Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ beteckna standardbasen i R^3. Bestäm matriserna ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$, ${}_{\mathbf{f}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}}$ och ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}}$
2. Låt A beteckna den linjära avbildning från R^3 till R^3 som består av först en spegling i planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och därefter en projektion på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.
   (a) Bestäm matrisen för denna linjära avbildning relativt standardbasen.
   (b) Bestäm avbildningens bildrum och nollrum.
3. Om den linjära avbildningen A vet man att $A(1,2,-1) = (2,2,1)$, $A(0,1,3) = (2,1,1)$ och $A(1,1,1) = (1,1,0)$. Bestäm den inversa avbildningens matris relativt standardbasen.
4. Visa att avbildningen A från R^3 till R^3 definierad genom
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, 1 + x_3 + x_1) \quad (x_1,x_2,x_3) \in R^3$$
   inte är linjär.
5. (a) Konstruera en linjär avbildning A från R^4 till R^4 sådan att A:s bildrum har dimension 2 och $A \circ A$ avbildar alla vektorer på nollvektorn.
   (b) Visa att detta är omöjligt om A är en linjär avbildning från R^3 till R^3.
6. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 0 \\ -2 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
7. Gör en s.k. ortogonal diagonalisering av matrisen
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Bestäm A^n när
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. En symmetrisk 3×3-matris har egenvärdena -1, -1 och 1. En egenvektor hörande till egenvärdet 1 är $(0, -1, 1)^T$. Bestäm matrisen A.

10. Matrisen $\mathbf{A}$ har egenvektorerna $(1, 2, -1)$, $(2, 1, 1)$ och $(1, 0, 1)$ hörande till egenvärdena 2, 3, -1 respektive. Bestäm $\mathbf{A}(4, 3, 1)$.

11. Matrisen $\mathbf{A}$ är symmetrisk och har bl a egenvektorerna $(1, 1, 1)$ och $(1, -2, -1)$. Bestäm samtliga egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

Lösningar kommer förhoppningsvis ut på kurshemsidan senast några dagar före lappskrivningen.