Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på linjära avbildningar och egenvärden och ehenvektorer inför lappskrivning nummer 5 på kursen linjär algebra SF1604, ht 07.

1. (a) $A(2,1,0) = A(2(1,0,0)+(0,1,0)) = 2A(1,0,0)+A(0,1,0) = (1,2,1)+(2,-1,2) = (3,1,3)$.

   (b) Kolonnerna i avbildningens matris ges av bilden av basvektorerna. Alltså blir avbildningens matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Nollrummet ges av de $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i R^3 sådana att $A\bar{x} = \bar{0}$ eller ekvivalent

$$\mathbf{A}\bar{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Detta ger ett homogent linjärt ekvationssystem med lösningsmängden

$$(x_1, x_2, x_3) = t(3,1,-5) \quad t \text{ reellt tal.}$$

   Alltså nollrummet är $span\{(3,1,-5)\}$.

   (c) Vi vet att A:s bildrummet är lika med matrisen $\mathbf{A}$:s kolonnrum. Då dimensionen av nollrummet plus dimensionen av kolonnrummet till en matris är lika med antalet kolonner så får vi att dimensionen av kolonnrummet är 2. Då kolonn 1 och kolonn 2 i det 2-dimensionella kolonnrummet är linjärt oberoende så bildar de en bas för detta rum. Således är A:s bildrum lika med $span\{(1,2,1),(2,-1,2)\}$.

   (d) Se nedan.

   (e) Den ovan givna matrisen $\mathbf{A}$ är matrisen ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}}$. Vi använder transitionsmatriser och Martins metod för att hitta de övriga.
   Martins metod ger lätt ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \quad \text{elem. radop.} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

   Vi ser i tablån bilden av vektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ är $(4,2,4)$, $(2,0,2)$ respektive $(-1,3,-1)$. Därför blir matrisen ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ lika med

$${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad {}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}} = {}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$_{\mathbf{f}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}} =_{\mathbf{f}} T_{\mathbf{e}\,\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Vi får också

$$_{\mathbf{f}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}} =_{\mathbf{f}} T_{\mathbf{e}\,\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Låt A beteckna den linjära avbildning från R^3 till R^3 som består av först en spegling i planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och därefter en projektion på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

   (a) Bestäm matrisen för denna linjära avbildning relativt standardbasen.

   Låt S beteckna speglingen och P projektionen och låt $\mathbf{S}$ respektive $\mathbf{P}$ beteckna dessa linjära avbildningars matriser relativt standardbasen. Den sökta matrisen blir då matrisen $\mathbf{PS}$. Vi söker nu matrisen $\mathbf{S}$.

   En normalvektor till spegeln är t ex $\bar{n} = (1, 1, -2)$ och två vektorer spegeln är t ex $\bar{u} = (1, -1, 0)$ och $\bar{v} = (2, 0, 1)$. Vid spegling gäller $S\bar{n} = -\bar{n}$ 0ch $S\bar{u} = \bar{u}$ och $S\bar{v} = \bar{v}$. Martins metod ger

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

   Matrisen $\mathbf{S}$ blir alltså

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

   Projektionsplanets normal är $\bar{n} = (2, 1, 2)$ och två vektorer paralella med planet är t ex $\bar{u} = (1, 0, -1)$ och $\bar{v} = (1, -2, 0)$. Det gäller att $P\bar{n} = \bar{0}$ och $P\bar{u} = \bar{u}$ och $P\bar{v} = \bar{v}$. Martins metod ger då matrisen $\mathbf{P}$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 5 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & -1 & 4/9 & 2/9 & -5/9 \\ 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -4/9 & -2/9 & 5/9 \end{array}\right)$$

Svar:

$$\mathbf{PS} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 20 & -17 & 10 \\ 8 & 14 & 14 \\ 4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

För spegling gäller att $S \circ S\bar{v} = \bar{v}$ för alla vektorer $\bar{v}$. Den vektor som speglas på projektionsplanets normal $(2,1,2)$ är alltså

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Vektorerna $(1,0,-1)$ och $(1,-2,0)$ ligger i planet och projiceras på sig själva. Dessa är spegelbilder av vektorerna

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

resp

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vi kan använda Martins metod för att bestämma $\mathbf{P}$ också men, för att visa på en annan metod ger vi först P:s matris relativt en ON-bas, där en av basvektorerna är en normal till planet.

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{3}(2,1,2) \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,-4,1).$$

Det gäller att $P\bar{f}_1 = \bar{0}$ och $P\bar{f}_2 = \bar{f}_2$ och $P\bar{f}_3 = \bar{f}_3$. Avbildningen P:s matris relativt denna bas blir då

$${}_{\mathbf{f}}\mathbf{P}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

För transitionsmatriserna som beskriver basbytet gäller

$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}} = \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad {}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T.$$

Svaret ges nu tillslut av

$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}}\,{}_{\mathbf{f}}\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\,{}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}}\mathbf{S} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} =?$$

(b) Nollrummet består av de vektorer som speglas på vektorer vinkelräta mot planet, dvs för vilka $S\bar{v} = (2,1,2)$. Vi obesrverar nu att speciellt vid spegling gäller att $S \circ S\bar{v} = \bar{v}$ så de sökta vektorerna satisfierar

$$\bar{v} = S(t(2,1,2)) = t\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Så nollrummet är $span\{(7,4,-4)\}$.

Bildrummet blir det plan på vilket vektorerna projiceras, dvs $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Vi använder Martins metod

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_1 & - \\ - & \bar{f}_2 & - & - & A\bar{f}_2 & - \\ - & \bar{f}_3 & - & - & A\bar{f}_3 & - \end{array}\right) \sim \text{elem. radop} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & A^{-1}\bar{e}_1 & - & - & \bar{e}_1 & - \\ - & A^{-1}\bar{e}_2 & - & - & \bar{e}_2 & - \\ - & A^{-1}\bar{e}_3 & - & - & \bar{e}_3 & - \end{array}\right)$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Svar: Inversa avbildningens matris relativt standardbasen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. För varje linjär avbildning gäller att $A\bar{0} = A0\bar{v} = 0A\bar{v} = \bar{0}$. För den givna avbildningen har vi $A(0,0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$ och alltså kan den inte vara linjär.

5. (a) Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ utgöra en bas för R^4 (vilken bas som helst, spelar ingen roll.) Definiera A genom

$$A\bar{e}_1 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_2 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_3 = \bar{e}_1, \quad A\bar{e}_4 = \bar{e}_2$$

och

$$A(\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4\bar{e}_4) = \lambda_1 A\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4 A\bar{e}_4.$$

Då blir A en linjär avbildning och

$$A \circ A(\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4\bar{e}_4) = A(\lambda_1 A\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4 A\bar{e}_4) = A(\lambda_3\bar{e}_1 + \lambda_4\bar{e}_2) = \lambda_3 A\bar{e}_1 + \lambda_4 A\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

(b) Om $A \circ A = 0$ så gäller för varje $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ att

$$A(A\bar{x}^T) = \bar{0}.$$

Detta innebär att varje kolonn $A\bar{x}^T$ tillhör A:s nollrum. Men mängden av alla kolonner $A\bar{x}^T$ utgör bildrummet som har dimension 2, som alltså inte kan ligga i nollrummet eftersom detta har dimension 1.

6. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer för matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 0 \\ -2 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-1)((9-\lambda)(2-\lambda) - 8) = \lambda(-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$$

Denna ekvation har rötterna 0, 1 och 10. Vi Löser nu systemet

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för dessa värden på λ. Vi får egenrummen $E_0 = span\{(1,0,-1)\}$, $E_1 = span\{(2,-1,2)\}$ och $E_{10} = span\{(1,4,1)\}$.

Matrisen B har egenrummen $E_{-1} = span\{(1,0,1)\}$, $E_0 = span\{(-1,1,1)\}$ och $E_3 = span\{(1,2,-1)\}$

Matrisen C har egenrummen $E_0 = span\{(0,0,1)\}$, $E_{10} = span\{(2,1,0)\}$ och $E_{15} = span\{(1,-2,0)\}$

7. Gör en s.k. ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning:

$$0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & -8 \\ 4 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -9+\lambda \\ 4 & -8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(9-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 8 & -7-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)[(7-\lambda)(-7-\lambda)-32] = (9-\lambda)[\lambda^2-81]$$

ger egenvärdena $\lambda = 9$ (dubbelrot) och $\lambda = -9$. Tillhörande ortogonalbas av egenvektorer t ex

till $\lambda = -9$: $e_1 = \frac{1}{3}(-1,2,2)$
till $\lambda = 9$: $e_2 = \frac{1}{3}(2,-1,2)$ och $e_3 = \frac{1}{3}(2,2,-1)$.

Diagonaliseringen blir således

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

8. Bestäm A^n när

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning Matrisen A har egenvärden 1 och 2 med tillhörande egenvektorer $(2,-1)$ respektive $(3,-1)$. Med

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

så får vi att

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

varur vi sluter att

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

OBSERVERA Eftersom matrisen inte är symmetrisk kan vi inte göra en s k ortogonal diagonalisering.

9. En symmetrisk 3×3-matris har egenvärdena -1, -1 och 1. En egenvektor hörande till egenvärdet 1 är $(0,-1,1)^T$. Bestäm matrisen A.

Lösning: Matrisens övriga egenvektorer bildar, eftersom matrisen är symmetrisk ett egenrum E_{-1} som ligger ortogonalt mot vektorn $(0,1,-1)$ *eftersom matrisen förutsattes vara symmetrisk.* (*eller någon annan vektor parallell med* $(0,-1,1)$. *Det gäller att varje multipel* $\lambda(0,-1,1)$ *av* $(0,-1,1)$ *också är en egenvektor hörande till egenvärdet 1.*) Egenrummet E_1 har dimension 1 eftersom 1 är ett enkelt nollställe till karaktersitiska ekvationen. Vektorerna $(1,0,0)$ och $(0,1,1)$ tillhör E_{-1} (*Vi kan ta vilka två icke parallella vektorer som helst som är ortogonala mot* $(0,-1,1)$. *Istället för* $(1,0,0)$ *och* $(0,1,1)$ *hade vi t ex kunnat välja* $(1,1,1)$ *och* $(2,1,1)$.) Vi har nu att för den linjära avbildning som A representerar gäller

$$A(1,0,0) = (-1,0,0), \quad A(0,1,1) = (0,-1,-1) \quad A(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

Detta ger, *t ex med Martins metod*, $A(0,2,0) = (0,-1,-1) + (0,1,-1) = (0,0,-2)$ och $A(0,0,2) = (0,-1,-1) - (0,1,-1) = (0,-2,0)$. Alltså $A(0,1,0) = (0,0,-1)$ och $A(0,0,1) = (0,-1,0)$. Således

SVAR:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alternativt har vi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

som uträknat blir som svaret ovan.

10. Matrisen $\mathbf{A}$ har egenvektorerna $(1,2,-1)$, $(2,1,1)$ och $(1,0,1)$ hörande till egenvärdena 2, 3, -1 respektive. Bestäm $\mathbf{A}(4\ 3\ 1)^T$.

Lösning: Vi skriver först vektorn $(4,3,1)$ som en linjärkombination av egenvektorerna:

$$(4,3,1) = x_1(1,2,-1) + x_2(2,1,1) + x_3(1,0,1)$$

Man finner att $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1$. Dvs

$$(4,3,1) = (1,2,-1) + (2,1,1) + (1,0,1)$$

Vi applicerar nu matrisen $\mathbf{A}$ och får då:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. Matrisen $\mathbf{A}$ är symmetrisk och har bl a egenvektorerna $(1,1,1)$ och $(1,-2,-1)$. Bestäm samtliga egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

Lösning: Då matrisen är symmetrisk så är egenvektorer hörande till skilda egenvärden ortogonala mot varandra. Egenvektorerna $(1,1,1)$ och $(1,-2,-1)$ är inte ortogonala mot varandra och måste då höra till samma egenvärde och spänna upp ett egenrum av dimension 2. Matrisen är uppenbarligen av formatet 3×3 och till den hör en ortogonalbas av egenvektorer. En tredje egenriktining $\bar{e}_1$ ges av en vektor ortogonal mot de givna två vektorerna t ex

$$\bar{e}_3 = (1,1,1) \times (1,-2,-1) = (1,2,-3).$$

SVAR. $span\{(1,1,1),(1,-2,-1)\}$ resp $span\{(1,2,-3)\}$