Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på linjära ekvationssystem, matriskalkyl och determinanter inför lappskrivning nummer 1 på kursen linjär algebra, SF1604, ht 07.

1.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right).$$
Vi läser ut ur tablån ovan att $z = -1$, $y = 2$ och $x = 1$.

2. Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet
$$\begin{cases} \phantom{-x+{}} 13y - 2z = 28 \\ -x + 5y + z = 10 \\ - 13y + 2z = -28 \end{cases}$$
Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 5y + z = 10 \\ - 13y + 2z = -28 \end{cases}.$$
Låter vi nu y vara ett godtyckligt tal $y = t$ så får vi för varje val av ett sådant tal t precis en lösning
$$z = \tfrac{1}{2}(-28 + 13t) = -14 + \tfrac{13}{2}t$$
$$x = -10 + 5y + z = -10 + 5t - 14 + \tfrac{13}{2}t = -24 + \tfrac{23}{2}t.$$

3. Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet
$$\begin{cases} \phantom{-x+{}} 13y - 2z + 5u = 28 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ - 13y + 2z + (a+2)u = b + 10 \end{cases}$$
Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet
$$\begin{cases} (a+7)u = b + 38 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ - 13y + 2z + (a+2)u = b + 10 \end{cases}.$$
Om $a = -7$ och $b \neq -38$ så saknar systemet uppenbarligen lösning.

4. Beräknar först inversen till matrisen A:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrisen till höger ovan är inversen men för säkerhets skull gör vi en kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

precis som det skall vara. Multiplicerar vi nu den givna matrisekvationen med $\mathbf{A}^{-1}$ till vänster på bägge sidor om likhetstecknet får vi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{dvs} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Vi finner alltså

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

5. a)

$$(\mathbf{A}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{A})^{-1} = (2\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$.

c)

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^T = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

d)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix})^T = (\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix})^T = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -26 & 45 \end{pmatrix}$$

e)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix})^{-1} = (\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix})^{-1} =$$

$$\frac{1}{5 \cdot 45 + (-26) \cdot (-19)} \begin{pmatrix} 45 & 26 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$$

6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1-(a-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

När $a \neq 1$ finns det bara den triviala lösningen. I övriga fall finns det icketriviala lösningar.

7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & a \\ 1 & -5 & 8 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & a-3 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right)$$

Systemet är lösbart precis då $a = 3$. Då har systemet oändligt många lösningar.

8. Låt $\mathbf{A}$ vara nollmatrisen. Då är $\mathbf{AB}$ symmetrisk för alla matriser $\mathbf{B}$. Låt $\mathbf{A}$ vara identitetsmatrisen. Då är $\mathbf{AB}$ inte symmetrisk för någon matris $\mathbf{B}$ som inte är symmetrisk.

9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) = 9.$$

10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1(-1)^{\text{antal streck snett uppåt höger}} = 2(-1)^2 = 2.$$

11.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ -2 & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} x & 1 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1,$$

som ju aldrig kan vara like med noll. Så inga x uppfyller ekvationen.

12. $\det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A) \cdot \det(A)$, ty $\det(A^T) = \det(A)$. Men då $\det(A) = 6$ så **Svar:** 36.

13. Addera kolonn två till kolonn ett och sedan kolonn tre till kolonn ett.

$$\begin{vmatrix} a+b & c+a & b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & a+b & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & b+c \\ 2(a+b+c) & a+b & b+c \\ 2(a+b+c) & a+b & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c+a & b+c \\ 1 & a+b & b+c \\ 1 & a+b & c+a \end{vmatrix}.$$

Subtrahera nu kolonn ett a gånger från kolnn två och b gånger från kolonn tre. Man får då en determinant med samma värde nämligen

$$2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

14. Då $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ har vi $\det(A)\det(B) = 7$. Då kan inte $\det(B) = 0$ och alltså är B inverterbar. Villkoret $\det(A) = 0$ var helt onödigt att ange och bara till för att förvilla.

15.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t-1 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2t & t-1 \\ t-1 & t \end{vmatrix}} = \frac{1}{t^2+2t-1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2t & 1 \\ t-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2t & t-1 \\ t-1 & t \end{vmatrix}} = \frac{t+1}{t^2+2t-1}$$

16. Matrisens determinant är

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Inversen blir då

$$\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$