Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på allmänna vektorrum inför lappskrivning nummer 3 på kursen Linjär algebra, ht07.

1. Vektorerna är linjärt beroende precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2+a \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 5 & 0 & 3 & 4a \end{vmatrix} = -1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2+a \\ 2 & 1 & a \\ 5 & 3 & 4a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2-a \\ 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2-a \\ -1 & a \end{vmatrix} = -2a + (2-a) = 2 - 3a.$$

När $a \neq \frac{2}{3}$ är vektorerna linjärt oberoende.

2. Vi undersöker om det finns tal x_1, x_2 och x_3 sådana att

$$x_1(1,2,3,4) + x_2(1,0,1,-1) + x_3(2,1,1,0) = (1,2,1,2).$$

Detta ger ett ekvationssystem som på tablåform kan skrivas och lösas enligt nedan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

vilket ju inte är möjligt eftersom $x_1 = -1$ och $4x_1 = 2$ är en orimlighet.

Svar: Den givan vektorn tillhör inte det givna linjära höljet.

3. Linjära höljet av dessa vektorer är lika med det minsta delrum som innehåller dessa vektorer. Vi lägger in vektorerna som rader i en matris. Sen utför vi elementära radoperationer på matrisen tills den kommer på så kallad trappsetgsform. Raderna som är skilda från noll bildar då en bas och dimensionen är lika med antale icke nollrader.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar: Dimensionen blir 3 och en bas till exempel $(1,2,1,2,1)$, $(0,1,3,3,2)$ och $(0,0,10,7,8)$.

4. De vektorer som satisfierar den givna ekvationen är lösningsrummet till det homogena systemet
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$
och alla lösningsrum till homogena system är delrum till R^4. Vi kan välja $x_2 = t$, $x_3 = s$ och $x_4 = u$ godtyckligt och får då att
$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2t - s + 2u.$$
Alltså blir de sökta vektorerna (x_1, x_2, x_3, x_4) precis följande
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2t - s + 2u, t, s, u) = t(-2, 1, 0, 0) + s(-1, 0, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1)$$
Vektorerna $(-2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ och $(2, 0, 0, 1)$ är linjärt oberoende och spänner upp lösningsrummet. Dimensionen blir alltså 3.

5. Att (x_1, x_2, x_3, x_4) tillhör bägge rummen innebär att både $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ skall gälla. Detta ger ett homogent ekvationssystem. De sökta vektorerna (x_1, x_2, x_3, x_4) utgöres av lösningarna till ett homogent system och är därmed ett delrum till R^4. Löses detta system med Gausselemination får vi
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(0, 1, 0, 1) + s(1, 0, -1, 0).$$
Dimensionen blir två och som bas kan vi t ex välja $(0, 1, 0, 1)$ och $(1, 0, -1, 0)$

6. Enligt den gängse algoritmen utför vi elementära radoperationer på matrisen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$
De tre raderna i sluttablån bildar en bas för **A**:s radrum. I sluttablån är de tre första kolonnerna linjärt oberoende och bildar en bas för kolonnrummet. Motsvarande kolonner i **A** bildar då en bas för **A**:s kolonnrum. En bas för givna kolonnrummet är alltså $(1, 2, -1)^T$, $(1, 1, -1)^T$ och $(2, 3, 2)^T$.

För nollrummet löser vi systemet $\mathbf{A}\bar{x}^T = \bar{0}^T$ med hjälp av Gausselimination
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right].$$
Sätt $x_4 = t$ och $x_5 = s$ och vi får $x_3 = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s$,
$$x_2 = -x_3 - 3x_5 - 6x_5 = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}s - 3t - 6s = -\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}s,$$
och
$$x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = \frac{3}{2}t + \frac{11}{2}s - 2(-\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s) - t - 2s = \frac{5}{2}t + \frac{9}{2}s.$$
Alltså
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{5}{2}t + \frac{9}{2}s, -\frac{3}{2}t - \frac{11}{2}s, -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}s, t, s) =$$
$$t(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0) + s(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1).$$
En bas för nollrummet är alltså $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0)$ och $(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1)$. Matrisens rang är lika med tre eftersom sluttablån bara innehåller tre icke nollrader.

7. Visa att vektorerna $(1,1,1,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-1,1,-1)$ och $(1,-1,-1,1)$ bildar en bas för R^4 och bestäm sedan koordinmaterna fór vektorn $(1,2,3,4)$ i denna bas.

   De är en bas om den determinant som har de givna vektorerna som kolonner är skild ifrån noll. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

   Nu återstår att lösa systemet

$$x_1(1,1,1,1) + x_2(1,1,-1,-1) + x_3(1,-1,1,-1) + x_4(1,-1,-1,1) = (1,2,3,4).$$

   Detta system har tablån

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

   Man får att $x_3 = -1/2$, $x_4 = 0$, $x_2 = -1$ och $x_1 = 5/2$.

8. Sätter upp en tablå med dessa vektorer som kolonner och kompletterar sedan med standardbasen som kolonner. Nu har vi garanterat ett kolonnrum som har dimension fyra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Elementära radoperationer ger nu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -6 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

   De fyra första kolonnerna i sluttablån är linjärt oberoende. Då kommer de fyra första kolonnerna i starttablån att vara linjärt oberoende. Eftersom de är fyra kommer de att spånna upp hela R^4 och därmed vara en bas för R^4.

   Svar: $\bar{e}_1 = (1,2,-2,1)$, $\bar{e}_2 = (2,1,3,1)$, $\bar{e}_3 = (1,3,4,1)$ och $\bar{e}_4 = (1,0,0,0)$.

9. Vektorn $(x_1,\ldots,x_5)$ tillhör V_1 precis då

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = t(1,2,3,2,1) + s(2,1,0,1,-1) + u(0,1,1,1,1)$$

för några tal s, t, u. Dvs precis då ekvationssystemet med tablån

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 & x_4 \\ 1 & -1 & 1 & x_5 \end{array}\right)$$

är lösbart. Gausselimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -6 & 1 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_4 - 2x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 + x_1 \end{array}\right).$$

Således gäller att $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör V_1 precis då $x_4 - x_2 = 0$ och $x_5 - x_2 + x_1 = 0$.

Liknande räkningar ger att en vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör V_2 precis då $5x_4 - 4x_2 + x_3 - 2x_1 = 0$ och $4x_4 - 3x_2 + x_5 - x_1 = 0$, men OBSERVERA andra steg i Gausseliminationen ger andra ekvationer, så man kan få rätt svar fast med olika ekvationer.

En vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tillhör både V_1 och V_2 om följande system satisfieras av vektorn

$$\begin{cases} x_4 - x_2 & = 0 \\ x_5 - x_2 + x_1 & = 0 \\ 5x_4 - 4x_2 + x_3 - 2x_1 & = 0 \\ 4x_4 - 3x_2 + x_5 - x_1 & = 0 \end{cases}$$

Om dett system löses erhåller man lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(1, 1, 1, 1, 0).$$

SVAR: De gemensamma vektorerna är de som kan skrivas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(1, 1, 1, 1, 0)$ för något tal t.

10. Antag att det finns en linjär relation mellan funktionerna

$$x(1 + t + t^2) + y \sin t + ze^t = 0 \qquad (\star)$$

som då skall vara giltig för alla värden på t. Speciellt gäller då likheten för $t = 0$ vilket ger $x + 0y + z = 0$ dvs att $x = -z$. Detta ger att med valet $t = -\pi$ att

$$x(1 - \pi + \pi^2) + 0y - x(e^{-\pi}) = 0.$$

Om då $x \neq 0$ så måste

$$1 - \pi + \pi^2 = \frac{1}{e^\pi}.$$

Högra ledet är mindre än ett men vänstar ledet är större än ett. Enda möjligehten är att $x = 0$ och därmed också att $z = 0$. Ekvationen $(\star)$ ger då $y \sin t = 0$ och alltså måste också $y = 0$. Alltså finns ingen icke trivial linjär relation mellan funktinerna. De är alltså linjärt oberoende.

11. Rummet P_3 av polynom av grad högst tre har basen 1, t, t^2, t^3. De givna polynomens koordinater i denna bas är $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 2, 0, -1)$ och $(1, 1, 1, 1)$. Vi chansar nu, pga tidsbrist, på att komplettera med vektorn $(1, 0, 0, 0)$. Kontrollerar värdet av en determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Vi chansade rätt och de givna tre vektorerna kan kompletteras med polynomet 1 (som har koordinaterna $(1, 0, 0, 0)$) till en bas för P_3.

Anmärkning Varje vektorer, som inte tillhör spannet av de tre givna vektorerna, kan användas till att komplettera det tre givna vektorerna.