Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar på linjära ekvationssystem, matriskalkyl och determinanter inför lappskrivning nummer 1 på kursen linjär algebra, SF1604, ht 07.

OBSERVERA Några av uppgifterna nedan är nog svårare än de problem som kommer vid lappskrivningen.

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ x - 18y + z = -38 \end{cases}$$

3. För vilka värden på talen a och b saknar systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + u = 8 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ x - 18y + z + au = b \end{cases}$$

lösning.

4. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en invers till matrisen $\mathbf{A}$ och använd denna invers för att bestämma en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

5. Låt matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara som ovan. Beräkna

$$(\mathbf{AA})^{-1}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{A})^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^T, \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T \quad \text{och} \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

6. Bestäm samtliga värden på det reella talet a för vilka det homogena systemet nedan har icketriviala lösningar.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

7. Bestäm talet a så att systemet nedan har minst en lösning

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

8. Om **A** är symmetrisk och **B** inte är symmetrisk är det då sant eller falskt att **AB** aldrig kan vara symmetrisk.

9. Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

10. Beräkna, på snabbast möjliga sätt, determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

11. Bestäm samtliga reella tal x sådana att
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

12. Låt A vara matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 357 \\ 0 & 2 & 84 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Beräkna $\det(A \cdot A^T)$.

13. Visa att
$$\begin{vmatrix} a+b & c+a & b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & a+b & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

14. Undersök om det finns matriser A och B sådana att $\det(AB) = 5$, $\det(A) \neq 0$ och matrisen B inte är inverterbar.

15. Lös med Cramers regel systemet
$$\begin{cases} 2tx & + & (t-1)y & = & 1 \\ (t-1)x & + & ty & = & 1 \end{cases}$$

16. Använd adjunkten (the adjoint matrix) för att bestämma inversen till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$