

Skrivningskod:
Glöm den inte!

Om du vill:
Lägg till tre bokstäver.

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

**Kontrollskrivning 3A, fredagen den 27 april 2007, 13.15–14.15,
i 5B1118 Diskret matematik för Media1**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.)
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

	sant	falskt
a) I alla grupper G med gruppoperationen \circ gäller det att $a \circ b = b \circ a$ för alla $a, b \in G$		x
b) En grupp G med 21 element kan ha element vars ordning är 5		x
c) Till varje naturligt tal $n \geq 1$ finns minst en grupp med n stycken element.	x	
d) För varje delgrupp H till en grupp G gäller att antalet element i H delar antalet element i G .	x	
e) För inversen a^{-1} till ett element a i en grupp G gäller alltid att $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a$	x	
f) Varje grupp har minst en cyklisk delgrupp.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) I gruppen $G = (Z_{10}, +)$, dvs elementen $0, 1, 2, \dots, 9$ med gruppoperationen addition modulo 10, utgör mängden $H = \{0, 5\}$ en delgrupp till gruppen G . Ange två olika höger sidoklasser till H i G .

$$H + 0 = \{0, 5\} \quad \text{och} \quad H + 1 = \{1, 6\}.$$

(Det finns ytterligare tre olika sidoklasser

$$\{2, 7\}, \quad \{3, 8\}, \quad \{4, 9\}$$

men det räcker ju med att ange två olika.)

b) (1p) Ange ordningen av nedanstående permutation φ :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

SVAR: 3.

(På cykelnotation har vi $\varphi = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$ och $\text{mgm}(3,3)=3$.)

c) (1p) Betrakta gruppen $G = (Z_8, +)$ dvs elementen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ och 7 med gruppoperationen addition modulo 8, (dvs det som vi vanligtvis betraktar gruppen $(Z_8, +)$ som). Är följande mängd H en delgrupp till G :

$$H = \{1, 4, 7\}.$$

SVAR: Nej

($1 + 4 = 5 \notin \{1, 4, 7\}$ så mängden är ej sluten med avseende på gruppoperationen.)

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Gruppen $G = (\mathbb{Z}_7, +)$ består av de sju elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5 och 6 och gruppoperationen är addition modulo talet 7 (dvs $(\mathbb{Z}_7, +)$ är det som man vanligtvis betraktar den att vara).

Bestäm ordningen av samtliga element i G . (Glöm inte att motivera ditt svar.)

Lösning: Vet att ordningen av ett element delar antalet element i gruppen G

som i detta fall är 7. Endast identiteten har ordning 1 så alla andra element måste ha ordning 7 eftersom 7 är ett primtal och inga andra delare än 7 och 1 har.

Namn	poäng uppg.4

4) Fyll i nedanstående tabell så att den blir en multiplikationstabellen för en abelsk grupp:

○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>			1
<i>b</i>	<i>b</i>				
<i>c</i>	<i>c</i>				
<i>d</i>					

Lösning: Vi använder dels att multiplikationstabellen till en abelsk grupp är symmetrisk och dels att varje element förekommer precis en gång i varje rad och kolonn. Vi får då succesivt:

○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1
<i>b</i>	<i>b</i>					<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>			
<i>c</i>	<i>c</i>					<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>			
<i>d</i>	<i>d</i>					<i>d</i>	<i>d</i>	1			

○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>			<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		<i>a</i>	
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>				<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>			
<i>d</i>	<i>d</i>	1				<i>d</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>		

○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>				<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1		
<i>d</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>			<i>d</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>		

○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	○	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1		<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>		<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ och $\psi = (1\ 2)(3\ 5\ 4)$. Bestäm en permutation γ så att $\varphi\gamma = \psi$.

Lösning: $\gamma = \varphi^{-1}\psi$ och då

$$\varphi^{-1} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

så får vi

$$\gamma = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)(1\ 2)(3\ 5\ 4) = (1)(2\ 5\ 3\ 4).$$