Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Kontrollskrivning 3B, fredagen den 27 april 2007, 13.15–14.15, i 5B1118 Diskret matematik för Media1

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	För inversen a^{-1} till ett element a i en grupp G gäller alltid att $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a$	x	
b)	En grupp G med 21 element kan ha element vars ordning är 4		x
c)	Varje grupp har minst en cyklisk delgrupp.	x	
d)	Till varje naturligt tal $n \geq 1$ finns minst en grupp med n stycken element.	x	
e)	För varje delgrupp H till en grupp G gäller att antalet element i H delar antalet element i G.	x	
f)	I alla grupper G med gruppoperationen $\circ$ gäller det att $a \circ b = b \circ a$ för alla $a, b \in G$		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) I gruppen $G = (Z_{12}, +)$, dvs elementen 0, 1, 2, ..., 11 med gruppoperationen addition modulo 12, utgör mängden $H = \{0, 6\}$ en delgrupp till gruppen G. Ange två olika höger sidoklasser till H i G.

$$H + 0 = \{0, 6\} \quad \text{och} \quad H + 1 = \{1, 7\}.$$

(Det finns ytterligare fyra olika sidoklasser

$$\{2, 8\}, \quad \{3, 9\}, \quad \{4, 10\} \quad \{5, 11\}$$

men det räckare ju med att ange två olika.)

b) (1p) Ange ordningen av nedanstående permutation φ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

SVAR: 4.

(På cykelnotation har vi $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$ och mgm(4,2)=4.)

c) (1p) Betrakta gruppen $G = (Z_8, +)$ dvs elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7 med gruppoperationen addition modulo 8, (dvs det som vi vanligtvis betraktar gruppen $(Z_8, +)$ som). Är följande mängd H en delgrupp till G:

$$H = \{1, 3, 6\}.$$

SVAR: Nej

($1 + 3 = 4 \notin \{1, 3, 6\}$ så mängden är ej sluten med avseende på gruppoperationen.)

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Gruppen $G = (Z_7, +)$ består av de sju elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5 och 6 och gruppoperationen är addition modulo talet 7 (dvs $(Z_7, +)$ är det som man vanligtvis betraktar den att vara).

Bestäm ordningen av samtliga element i G. (Glöm inte att motivera ditt svar.)

Lösning: Vet att ordingen av ett element delar antalet element i gruppen G

som i detta fall är 7. Endast identiteten har ordning 1 så alla andra element måste ha ordning 7 eftersom 7 är ett primtal och inga andar delare än 7 och 1 har.

Namn	poäng uppg.4

4) Fyll i nedanstående tabell så att den blir en multiplikationstabellen för en abelsk grupp:

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & x & y & z & w \\ \hline 1 & 1 & x & y & z & w \\ x & x & y & & & 1 \\ y & y & & & & \\ z & z & & & & \\ w & & & & & \end{array}$$

Lösning: Vi använder dels att multiplikationstabellen till en abelsk grupp är symmetrisk och dels att varje element förekommer precis en gång i varje rad och kolonn. Vi får då succesivt:

(tyvärr fel notation, nedan skall $a = x, b = y, c = z$ och $d = w$.)

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & & & & \\ c & c & & & & \\ d & d & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & & & \\ c & c & d & & & \\ d & d & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & & & a \\ c & c & d & & & \\ d & d & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & & & a \\ c & c & d & & & \\ d & d & 1 & a & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & d & 1 & a \\ c & c & d & & & \\ d & d & 1 & a & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & d & 1 & a \\ c & c & d & 1 & & \\ d & d & 1 & a & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & d & 1 & a \\ c & c & d & 1 & & \\ d & d & 1 & a & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & d & 1 & a \\ c & c & d & 1 & a & b \\ d & d & 1 & a & b & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} \circ & 1 & a & b & c & d \\ \hline 1 & 1 & a & b & c & d \\ a & a & b & c & d & 1 \\ b & b & c & d & 1 & a \\ c & c & d & 1 & a & b \\ d & d & 1 & a & b & c \end{array}$$

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ och $\psi = (1\ 2\ 3)(5\ 4)$. Bestäm en permutation γ så att $\varphi\gamma = \psi$.

Lösning: $\gamma = \varphi^{-1}\psi$ och då

$$\varphi^{-1} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$$

så får vi

$$\gamma = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)(5\ 4) = (1)(2)(3\ 5)(4).$$