Skrivningskod: Glöm den inte!		**Om du vill:** Lägg till tre bokstäver.	

KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Kontrollskrivning 5B, torsdagen den 10 maj 2007, 13.15–14.15, i 5B1118 Diskret matematik för Media1

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Den kompletta grafen K_5, bestående av fem noder och en kant mellan varje par av noder, är en planär graf.		x
b)	En alternerande stig, till en matchning M, börjar och slutar i matchade noder.		x
c)	Ett träd med e noder har alltid $e-1$ kanter.	x	
d)	En graf är Hamiltonsk om varje nod har en jämn valens (dvs grad).		x
e)	Ett träd kan aldrig vara en bipartit graf.		x
f)	Den kompletta grafen K_n har precis $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Om en kant tas bort i nedanstående graf med noderna a, b, c, d, e, f kommer grafen att få en Eulerkrets. Vilken kant skall tas bort.

a	b	c	d	e	f
b	c	d	e	f	e
f	a	b	c	d	a
d	f	f	a	c	c
	e	e		b	b

(Tabellen skall tolkas så att
noden a har grannarna b, d, f,
noden b har grannarna c, a, f, e etc.)

Lösning: Om kanten mellan a och d tas bort får alla noder en jämn valens.

b) (1p) Ange en transversal till mängderna

$$\{1,3,5\}, \quad \{2,4,8\}, \quad \{1,4,7\} \quad \text{och} \quad \{3,4,7\}.$$

Lösning: $(1, 2, 7, 3)$

c) (1p) Den sammanhängande planära grafen G består av 6 noder och 7 kanter. Hur många områden, ytterområdet inräknat, skulle en plan ritning av grafen ha.

Lösning: (Eulers formel $v + r = e + 2$ ger) $r = 7 + 2 - 6 = 3$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Är nedanstående två grafer isomorfa? Motivera ditt svar.

Lösning: Grannodtabellerna till graferna är

a	b	c	d	e	f
b	c	d	e	f	e
f	a	b	c	d	a
		f			c

resp

x	u	y	w	z	v
v	y	u	y	w	y
u	x	w	z	v	z
		v			x

Utifrån den givna ritningen ser vi att med bijektionen

$$\varphi(a) = x, \quad \varphi(b) = u, \quad \varphi(c) = y, \quad \varphi(d) = w, \quad \varphi(e) = z, \quad \varphi(f) = v,$$

varje grannrelation är verifierad.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Undersök om det finns någon graf G bestående av två komponenter G_1 och G_2, med nedanstående antal noder och valenser (dvs grader):

Komponenten G_1 har
5 noder med valensen (=graden) 1,
2 noder med valensen (=graden) 2,
2 noder med valensen (=graden) 3,
3 noder med valensen (=graden) 4.
Totalt har alltså komponenten G_1 12 stycken noder.

Den andra komponenten G_2 har 17 noder som alla utom en har valensen (=graden) 4. Undantaget utgörs av en nod som har valens (=graden) 1.

Lösning: Varje komponent är en graf i sig, så komponentens valenssumma måste vara lika med 2 gånger antalet kanter. Men ingen komponent har en jämn valenssumma.

SVAR: Det finns ingen graf med de givna valenserna.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Motivera varför varje sammanhängade graf med n noder har minst $n-1$ stycken kanter. (Man får hänvisa till satser i boken och satser diskuterade på föreläsningarna. Dessa satser behöver man då inte bevisa.)

Lösning: Låt T vara ett spännande träd till grafen, som ju existerar eftersom grafen är sammanhängande. Antalet noder i T är n. Antalet kanter i T är $n-1$. Varje kant i T finns med som kant i grafen i fråga. Alltså måste den sammanhängande grafen ha minst $n-1$ kanter.