Matematiska Institutionen, KTH

Några uppgifter till övningen den 23 november, Diskret matematik IT2, ht07.

1. De inverterbara elementen i Z_{14} bildar en grupp under operationen multiplikation. Undersök om denna grupp är cyklisk.

2. Gruppen $(Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$ är cyklisk. Bestäm en generator till denna grupp.

3. Den inverterbara elementen i Z_{64} bildar en grupp G. Visa att varje element $g \in G$ satisfierar $g^{32} = 1$.

4. En direkt produkt av två grupper G_1 och G_2 med operationerna $\circ_1$ resp $\circ_2$ definieras som gruppen $(G_1 \times G_2, \circ)$ där

   $$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2\} \quad \text{och} \quad (g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ_1 h_1, g_2 \circ_2 h_2).$$

   Den direkta produkten av två grupper är alltid en grupp.

   Visa att gruppen $(Z_2, +) \times (Z_3, +)$ är isomorf med gruppen $(Z_6, +)$, men att gruppen $(Z_3, +) \times (Z_3, +)$ inte är isomorf med gruppen $(Z_9, +)$.

5. Bestäm en delgrupp med åtta element till gruppen $(Z_4, +) \times (Z_4, +)$.

6. En given grupp G har delgrupper H och K med 39 respektive 40 element. Vilket är det minsta antal m element G kan ha. Konstruera också en grupp G med m element som har delgrupper med 39 resp 40 element.

7. Visa att nedanstående tabell aldrig kan fyllas i så att det blir multiplikationstabellen till en grupp.

$\circ$	a	b	c	d	f	g	h	k	i
a	a	b							
b	b	a							
c									
d									
f									
g									
h									
k									
i									

.

8. Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   $$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

   Beräkna $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1} och ψ^{-1}.

9. Skriv permutationerna φ och ψ ovan som produkter av disjunkta cykler.

10. Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

    $$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

    (a) Skriv följande permutationer som en produkt av disjunkta cykler: $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1} och $\varphi^{-1}\psi\varphi$.

(b) Skriv φ och ψ på tablåform.

11. Bestäm ordningen av permutationerna φ och ψ ovan.

12. Bestäm ordningen av permutationen

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

13. Skriv permutationerna ψ och φ nedan som produkter av transpositioner.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 3 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

14. Bestäm en permutation x sådan att $\varphi x = \psi$ där

$$\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$